Vorlesung
Einführung in die Mathematische Optimierung
(Wintersemester 2013/14)

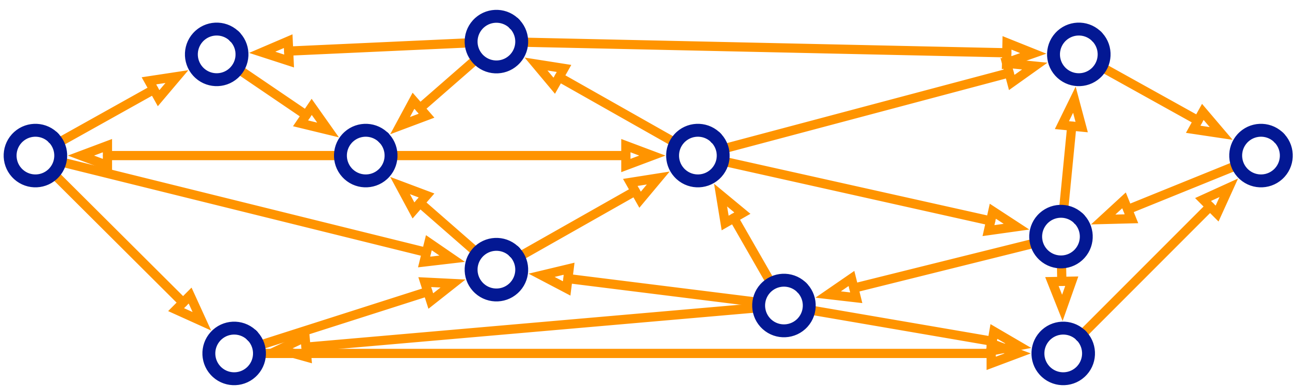
Einleitung

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 11. Oktober 2013)

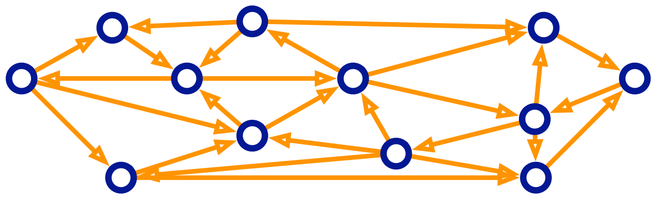
Kommunikationsnetzwerke...



Daten

- u_{ij}: Maximale Bitrate über Link (i, j)
- c_{ij}: Kosten Übertragung ein Bit über (i, j)
- $b^{k\ell}$: (Konstante) Bitrate von k nach ℓ

. . . Kommunikationsnetzwerke



Ziel

Route Daten unter minimalen Kosten.

Modellierung: Variablen

$x_{ij}^{k\ell}$: Datenrate für die Verbindung von k nach ℓ auf Link (i,j)

Können zulassen (weil Bitraten groß sind): $x_{ij}^{k\ell} \in \mathbb{R}$

Lineares Optimierungsmodell

Minimiere

$$\sum_{(i,j)\text{ Link}} \sum_k \sum_\ell c_{ij} x_{ij}^{k\ell}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j:(j,i)\text{ Link}} x_{ji}^{k\ell} - \sum_{j:(i,j)\text{ Link}} x_{ij}^{k\ell} &= \begin{cases} -b^{k\ell} & (i=k) \\ b^{k\ell} & (i=\ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} & \forall i,k,\ell \\
\sum_k \sum_\ell x_{ij}^{k\ell} &\leq u_{ij} & \forall (i,j) \\
x_{ij}^{k\ell} &\geq 0 & \forall (i,j),k,\ell
\end{aligned}$$

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung

Optimierung von

- linearen Zielfunktionen

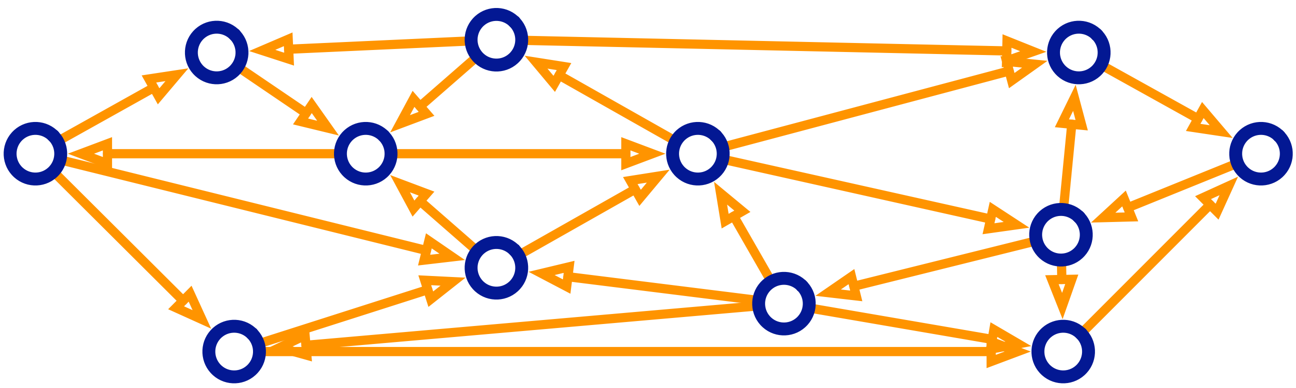
unter (endlich vielen)

- linearen Nebenbedingungen ($=$, $\leq$, $\geq$)

in (endlich vielen)

- kontinuierlichen Variablen.

Variante



Zusätzliche Daten

f_{ij}: Fixkosten für Verwendung von Link (i, j)

Zusätzliche Variablen

$y_{ij} \in \{0, 1\}$: 1, falls Link (i, j) verwendet, sonst 0

Gemischt ganzzahliges Modell

Minimiere

$$\sum_{(i,j)\text{ Link}} \sum_k \sum_\ell c_{ij} x_{ij}^{k\ell} + \sum_{(i,j)\text{ Link}} f_{ij} y_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}
\sum_{j:(j,i)\text{ Link}} x_{ji}^{k\ell} - \sum_{j:(i,j)\text{ Link}} x_{ij}^{k\ell} &= \begin{cases} -b^{k\ell} & (i = k) \\ b^{k\ell} & (i = \ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} && \forall i, k, \ell \\
\sum_k \sum_\ell x_{ij}^{k\ell} &\leq u_{ij} y_{ij} && \forall (i,j) \\
x_{ij}^{k\ell} &\geq 0 && \forall (i,j), k, \ell \\
y_{ij} &\in \{0,1\} && \forall (i,j)
\end{aligned}$$

(Gemischt) Ganzzahlige Lineare Optimierung

Optimierung von

- linearen Zielfunktionen

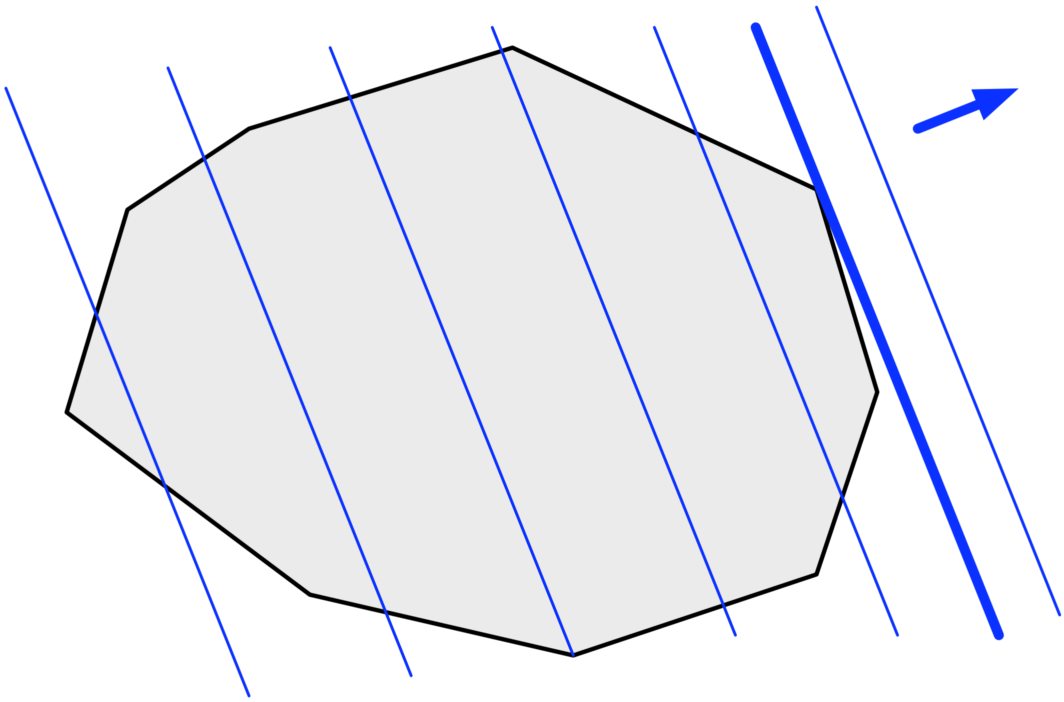
unter (endlich vielen)

- linearen Nebenbedingungen ($=$, $\leq$, $\geq$)

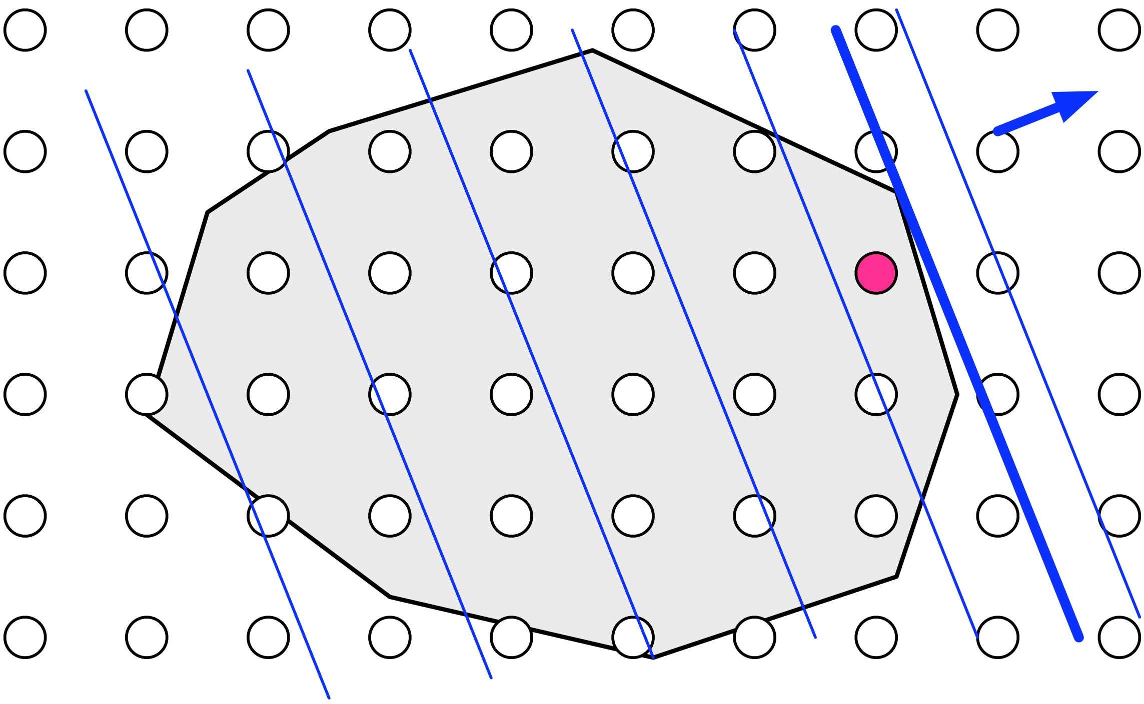
in (endlich vielen)

- Variablen, von denen einige nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung



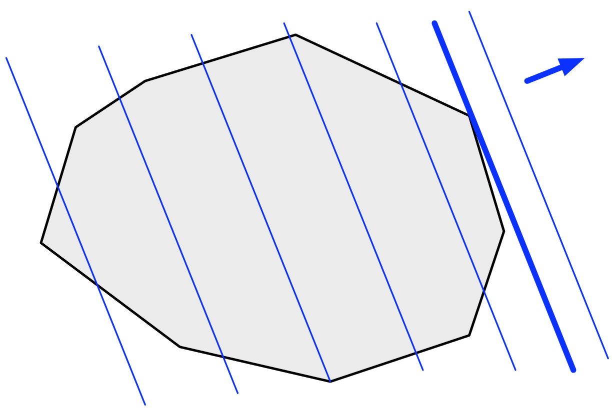
Ganzzahlige Lineare Optimierung...



. . . Ganzzahlige Lineare Optimierung

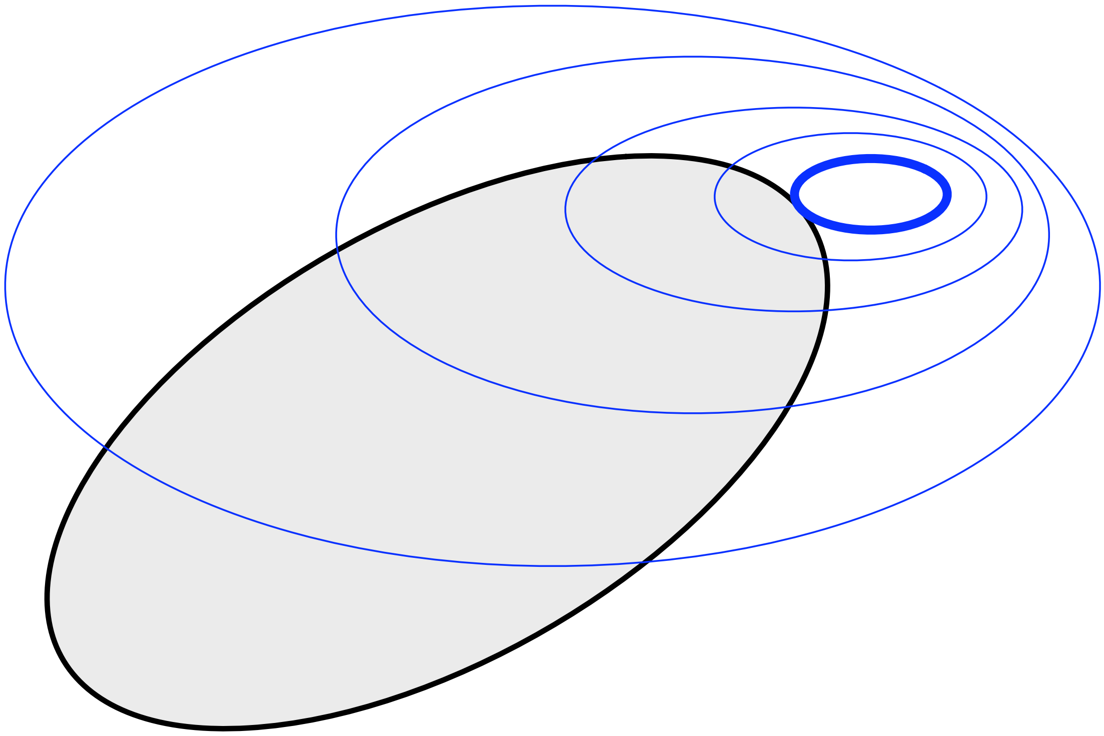
- Mächtig (z.B. 0/1-Entscheidungsvariablen)
- Baut auf (kontinuierlicher) LP auf
- Einblick am Ende dieser VL
- Vertiefung:
  - WiSem 14/15: VL *Kombinatorische Optimierung*
  - SoSem 15: VL *Ganzzahlige Optimierung*

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung



- Sehr gutes strukturelles Verständnis (Zertifikate, Dualität)
- Theoretisch effizient lösbar (polynomial)
- Praktisch effizient lösbar
- Hintergrund: Konvexität

Konvexe Optimierung



Portfolio-Optimierung

Daten

- n Anlagemöglichkeiten (Anlage)
- Zu investierendes Kapital: $K = 1$
- R_i: Rendite Anlage i (Zufallsvariable)

Variablen

x_i: Anteil des in Anlage i investierten Kapitals

Gesamtrendite (Zufallsvariable)

$G(x, R) = \sum_{i=1}^{n} R_i x_i$

Optimierungsmodell

- Ziel: Maximale erwartete Rendite unter der Nebenbedingung, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Anteil von b zu verlieren, höchstens α ist.
- Maximiere

$$\mathbb{E}[G(x,R)]$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=1}^{n} x_i & = & 1 \\ \mathbb{P}[G(x,R) \geq -b] & \geq & 1-\alpha \\ x & \geq & \mathbb{O} \end{array}$$

Optimierungsmodell (umformuliert)

Maximiere

$$\langle \bar{r}, x \rangle$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{array}{rcl} \langle \mathbb{1}, x \rangle & = & 1 \\ z_\alpha \sqrt{x^\top C x} - \langle \bar{r}, x \rangle - b & \leq & 0 \\ x & \geq & \mathbb{O} \end{array}$$

- z_α: $(1-\alpha)$-Quantil Standardnormalverteilung
- C: Kovarianzmatrix (positiv definit) der normalverteilten R_i
- $\bar{r}_i$: Erwartungswerte der R_i

Konvexe Optimierung

Minimierung von

- konvexen Zielfunktionen

über

- konvexen (abgeschlossenen) Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$

- Hier: Differenzierbare Zielfunktionen
- Oft: $X = \{x \in X_0 \,|\, g_i(x) \leq 0 \text{ für } i = 1, \ldots, m\}$ mit einfacher konvexer Menge X_0, g_i konvex

Inhalt

- Optimierung ohne Nebenbedingungen
- Konvexe Mengen und Kegel
- Optimalitätsbedingungen für konvexe Optimierungsprobleme
- Dualität und Konische Optimierung
- Polynomiale Verfahren für konvexe Optimierung
- Die Geometrie der Linearen Optimierung
- Der Simplex-Algorithmus
- Ganzzahlige und Kombinatorische Optimierung

Literatur...

- R. J. Vanderbei
  Linear Programming
  Springer, 2001.
- J. Matousek und B. Gärtner
  Using and Understanding Linear Programming
  Springer, 2006.
- V. Chvatal
  Linear Programming
  Freeman, 1983.
- D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis
  Introduction to Linear Optimization
  Athena, 1997

...Literatur

- G. B. Dantzig
  Linear Programming and Extensions
  Princeton University Press, 1998 (1963).
- A. Ruszcynski
  Nonlinear Optimization
  Princeton University Press, 2006
- A. Schrijver
  Theory of Linear and Integer Programming
  Wiley, 1986.
- M. Grötschel, L. Lovàsz, A. Schrijver
  Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.
  Springer, 1988.

Folien

- `www.math.uni-magdeburg.de/~kaibel/`
- Empfehlung: Zur VL mitbringen (Notizen)
- Ergänzen Tafelanschrift
- Folien sind kein Skript

Organisatorisches

- Vorlesung
  - Dienstag 13:15-14:45 G22A-203
  - Mittwoch 11:15-12:45 G03-214
- Übungen
  - Verantwortlich: Matthias Walter
  - Donnerstag, 15:00-16:30 (G03-214)
- Leistungsnachweis
  - Klausur (Übung letzte VL-Woche)
  - Teilnahmenvoraussetzungen
    - Übungspunkte, Vorrechnen
    - Details in Übungen
- Modulprüfung
  - September 2014 (Februar/März 2014)
  - In der Regel: Gemeinsam mit Numerik