# Vorlesung
# **Einführung in die Mathematische Optimierung**
(Wintersemester 2013/14)

Kapitel 2: Konvexe Mengen und Kegel

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 11. Oktober 2013)



## Gliederung

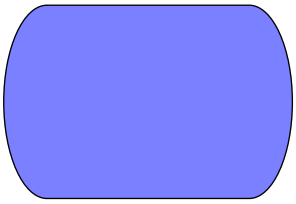
# Konvexe Mengen

**Definition 2.1**

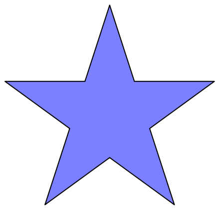
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in X$

$$\lambda x + (1-\lambda)y \;\in\; X$$

für alle $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt.



konvex



nicht konvex

- Eine Menge ist genau dann konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungstrecke enthält.
- Konvexe Mengen sind (weg-)zusammenhängend.



# Konvexe Funktionen auf konvexen Mengen

**Definition 2.2**

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**/**konkav**, wenn für alle $x, y \in X$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \;\leq / \geq\; \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

gilt.

**Bemerkung 2.3**

*Nimmt eine konvexe/konkave Funktion auf einer konvexen Menge in einem Punkt ein lokales Minimum/Maximum an, so nimmt sie dort auch ihr globales Minimum/Maximum an.*

(Beweis wie Beweis von Bem. 1.8.)

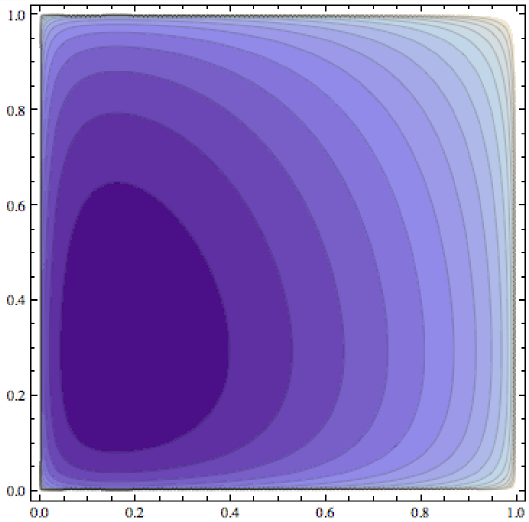
# Niveaumengen

**Beobachtung 2.4**

*Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$$

*konvex.*





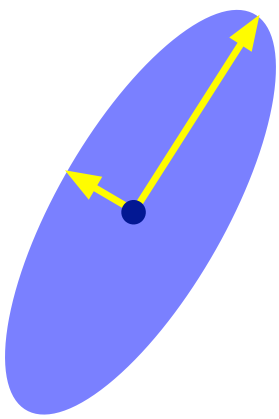

# Ellipsoide

**Bemerkung 2.5**

*Für eine positiv definite symmetrische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $z \in \mathbb{R}^n$ ist das von $Q$ definierte* **Ellipsoid**

$$\mathrm{Ell}(z, Q) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (x - z)^{\mathsf{T}} Q^{-1} (x - z) \leq 1\}$$

*mit Zentrum $z$ konvex (und kompakt).*

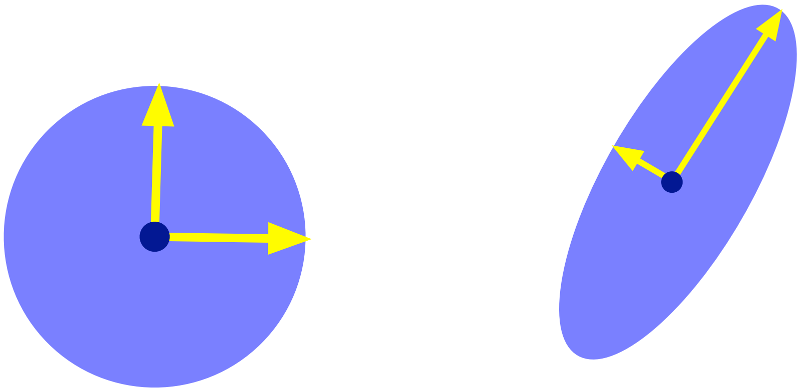


# Ellipsoide und Bälle

- Das einfachste Ellispoid ist der **Ball**

$$B(z, \varrho) := \mathrm{Ell}(\varrho^2 \mathbb{I}_n, z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \leq \varrho\}$$

  vom Radius $\varrho > 0$ um $z \in \mathbb{R}^n$.
- Spalten von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Mit Quadratwurzeln der Eigenwerte skalierte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von $Q$
- Dann ist $\mathrm{Ell}(Q, z) = C \cdot B(\mathbb{O}_n, 1) + z$ (Spalten von $C$: Halbachsen von $\mathrm{Ell}(Q, z)$).





# Schnitte konvexer Mengen

**Beobachtung 2.6**

*Ist $I$ eine Indexmenge (beliebiger Kardinalität), und sind $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen ($i \in I$), so ist auch ihre Schnittmenge*

$$\bigcap_{i \in I} X_i$$

*konvex.*

# Konvexe Hüllen

**Definition 2.7**

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{conv} X := \cap\{X' \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, X \subseteq X', X' \text{ konvex}\}$$

die **konvexe Hülle** von $X$.

- **Lineare Hülle**:

$$\operatorname{lin} X := \cap\{L \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, X \subseteq L, L \text{ linearer Unterraum}\}$$

- **Affine Hülle**:

$$\operatorname{aff} X := \cap\{A \subseteq \mathbb{R}^n \,|\, X \subseteq A, A \text{ affiner Unterraum}\}$$



# Kombinationen

Für $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$$

eine **lineare Kombination** von $x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}$.

- Falls $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$: **affine Kombination**
- Falls $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$: **konische Kombination**
- Konische affine Kombinationen: **konvexe Kombinationen**

**Bemerkung 2.8**

*Die konvexe / lineare / affine Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller konvexen /linearen / affinen Kombinationen von (endlich vielen) Punkten aus $X$.*

# Halbräume, Hyperebenen

**Definition 2.9**

Für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ heißen

$$\mathrm{H}^{\leq}(a, \beta) \ := \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x \rangle \leq \beta\}$$

und

$$\mathrm{H}^{=}(a, \beta) \ := \ \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle a, x \rangle = \beta\}$$

der von $(a, \beta)$ definierte (affine) **Halbraum** bzw. die von $(a, \beta)$ definierte (affine) **Hyperebene** (falls $\beta = 0$: **linear**).

**Beobachtung 2.10**

- *Halbräume sind konvex (und abgeschlossen).*
- *Hyperebenen sind konvex.*
- *Affine Unterräume sind konvex.*
- *Die Schnittmenge beliebig vieler Halbräume ist konvex.*



# Polyeder

**Definition 2.11**

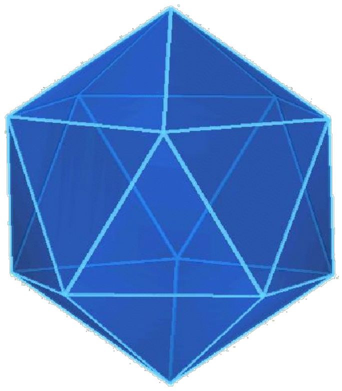
Eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **(konvexes) Polyeder**, wenn $P$ die Schnittmenge *endlich vieler* affiner Halbräume ist.

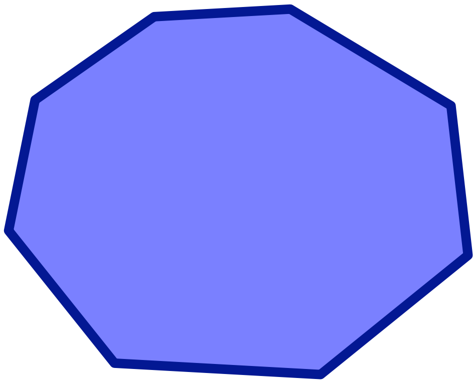
- $P = \varnothing$ und $P = \mathbb{R}^n$ (Schnitt über leerer Indexmenge) sind Polyeder
- Affine Unterräume sind Polyeder.

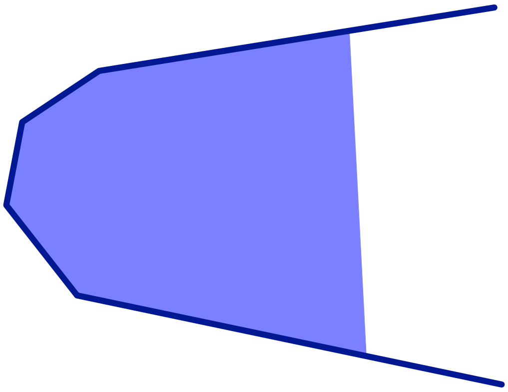
**Beobachtung 2.12**

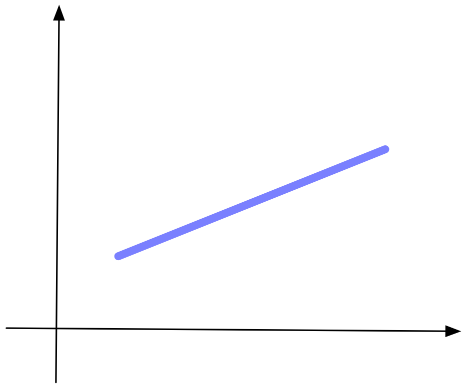
1. *Polyeder sind konvex und (topologisch) abgeschlossen.*
2. *Die Menge* $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$ *der zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems ist ein Polyeder.*

# Polyeder: Beispiele











# Minkowski-Summen und Skalierungen

**Definition 2.13**

Für Mengen $X_1, \ldots, X_q \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst

$$\sum_{i=1}^{q} X_i = X_1 + \cdots + X_q := \left\{ \sum_{i=1}^{q} x^{(i)} : x^{(i)} \in X_i \text{ für alle } i \in [q] \right\}$$

die **Minkowski-Summe** von $X_1, \ldots, X_q$.

**Bemerkung 2.14**

*Minkowski-Summen und Skalierungen konvexer Mengen sind konvex.*

($X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha X := \{\alpha x \,|\, x \in X\}$ **Skalierung** von $X$)

# Trennsätze für konvexe Mengen

**Satz 2.15**

*Sind* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex und abgeschlossen und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$*, so gibt es* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *und* $\varepsilon > 0$ *mit* $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle - \varepsilon$ *für alle* $x \in X$.

**Satz 2.16**

*Sind* $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexe Mengen mit* $X \cap Y = \varnothing$*, so gibt es* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *mit* $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle$ *für alle* $x \in X, y \in Y$.



# Topologischer Abschluss

**Bemerkung 2.17**

*Für jede konvexe Menge* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist auch der topologische Abschluss* $\operatorname{cl}(X)$ *von* $X$ *konvex.*

**Korollar 2.18**

*Der topologische Abschluss einer konvexen Menge ist der Schnitt aller sie enthaltenden Halbräume.*

**Bemerkung 2.19**

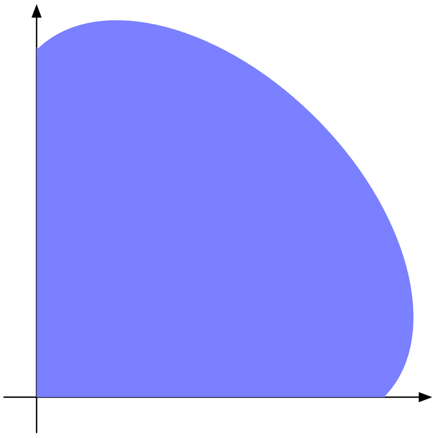
*Die Schnittmengen (beliebig vieler) Halbräume sind also genau die abgeschlossenen konvexen Mengen.*

(Die Schnittmengen *endlich* vieler Halbräume sind die Polyeder.)

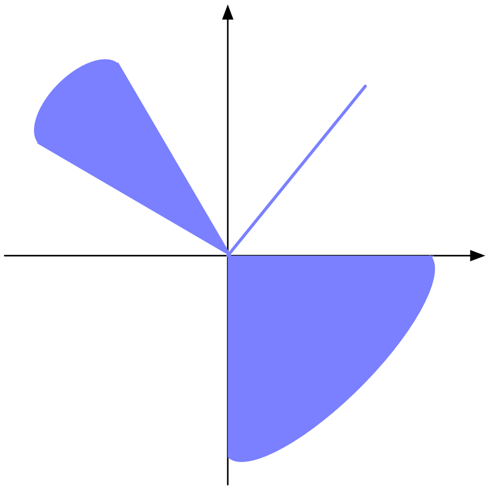
# Kegel

**Definition 2.20**

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn $K \neq \emptyset$ ist und für alle $x \in K$ und $\alpha \geq 0$ auch $\alpha x \in K$ ist.



$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq \mathbb{O}_n\}$
konvexer Kegel



nicht konvexer Kegel



# Eigenschaften von Kegeln

**Bemerkung 2.21**

*Ist $I$ eine Indexmenge (beliebiger Kardinalität), und sind $K_i \subseteq \mathbb{R}^n$ Kegel ($i \in I$), so ist auch die Schnittmenge $\bigcap_{i \in I} K_i$ ein Kegel.*

**Bemerkung 2.22**

*Eine nicht leere Menge $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn $K$ alle konischen Kombinationen von Elementen aus $K$ enthält.*

# Wichtige Kegel

- Der **nicht-negative Orthant**

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq \mathbb{O}_n\} \,.$$

- Der **Kegel der positiv-semidefiniten Matrizen**

$$\mathbb{S}^k_+ := \{A \in \mathbb{S}^k \,|\, A \text{ positiv semidefinit}\} \,,$$

  wobei $\mathbb{S}^k$ der $\frac{k(k+1)}{2}$-dimensionale Unterraum der symmetrischen Matizen in $\mathbb{R}^{k \times k}$ ist.
- $\mathbb{R}^n_+$ und $\mathbb{S}^k_+$ sind konvex und abgeschlossen.



# Trennsatz für konvexe Kegel

**Satz 2.23**

*Sind $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener konvexer Kegel und $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ ein Punkt außerhalb von $K$, so gibt es $a \in \mathbb{R}^n$ mit*

$$\langle a, x \rangle \leq 0 \quad \textit{für alle } x \in K \quad \textit{und} \quad \langle a, y \rangle = 1 \,.$$

# Konische Hüllen

**Definition 2.24**

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die **konische Hülle** von $X$

$$\operatorname{cone} X := \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq K, K \text{ Kegel}\}.$$

**Bemerkung 2.25**

$$\operatorname{cone} X = \{\alpha x \mid x \in X, \alpha \geq 0\} \cup \{\mathbb{O}_n\}$$

**Bemerkung 2.26**

- *Für alle $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{cone} X$ ein Kegel.*
- *Für konvexe Mengen $X$ ist $\operatorname{cone} X$ ein konvexer Kegel.*



# Konvex-konische Hüllen

**Definition 2.27**

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{ccone} X := \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq K, K \text{ konvexer Kegel}\}$$

die **konvex-konische Hülle** von $X$.

**Bemerkung 2.28**

*Für alle $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{ccone} X$ ...*

- *... ein konvexer Kegel.*
- *... die Menge aller konischen Kombinationen von Elementen aus $X$.*

# Endlich erzeugte Kegel

## Definition 2.29

Ein Kegel ist **endlich erzeugt**, wenn er

$$\operatorname{ccone} X = \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \,\Big|\, \lambda_x \geq 0 \text{ für alle } x \in X \Big\}$$

für eine *endliche* Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.
Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sogar linear unabhängig, so heißt $\operatorname{ccone} X$ ein **simplizialer** Kegel.

## Bemerkung 2.30

*Endlich erzeugte Kegel sind konvex.*



# Satz von Carathéodory

## Satz 2.31

*Sind $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in \operatorname{ccone} X$, so gibt es eine linear unabhängige Teilmenge $\tilde{X} \subseteq X$ von $X$ mit $x \in \operatorname{ccone} \tilde{X}$ (insbesondere: $|\tilde{X}| \leq n$).*

## Satz 2.32

*Endlich erzeugte Kegel sind konvex und abgeschlossen.*

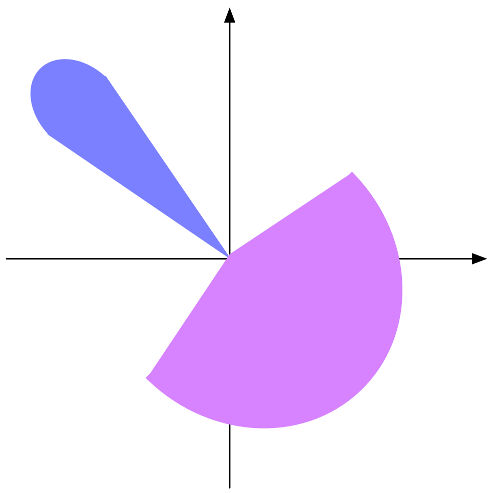
# Polare von Kegeln

**Definition 2.33**

Für einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x\rangle \le 0 \text{ für alle } x \in K\}$$

der zu $K$ **polare Kegel**.





# Eigenschaften von Polaren

**Bemerkung 2.34**

*Für zwei Kegel $K_1 \subseteq K_2$ gilt ${K_1}^\circ \supseteq {K_2}^\circ$.*

**Bemerkung 2.35**

*Für einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{cl}(K)$ ein Kegel mit $K^\circ = (\mathrm{cl}(K))^\circ$.*

**Bemerkung 2.36**

*Die Polaren von Kegeln sind konvexe abgeschlossene Kegel.*

**Bemerkung 2.37**

*Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $(\mathrm{ccone}\, X)^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \le 0 \text{ für alle } x \in X\}$.*

**Satz 2.38**

*Für jeden abgeschlossenen konvexen Kegel $K$ gilt $K^{\circ\circ} = K$.*

# Polare von Schnitten

**Satz 2.39**

*Sind* $K_1, \dots, K_q \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexe Kegel mit*

$$K_1 \cap \Big( \bigcap_{i=2}^{q} \operatorname{int}(K_i) \Big) \neq \varnothing \,, \tag{1}$$

*so ist*

$$\Big( \bigcap_{i=1}^{q} K_i \Big)^{\circ} = \sum_{i=1}^{q} K_i{}^{\circ} \,. \tag{2}$$

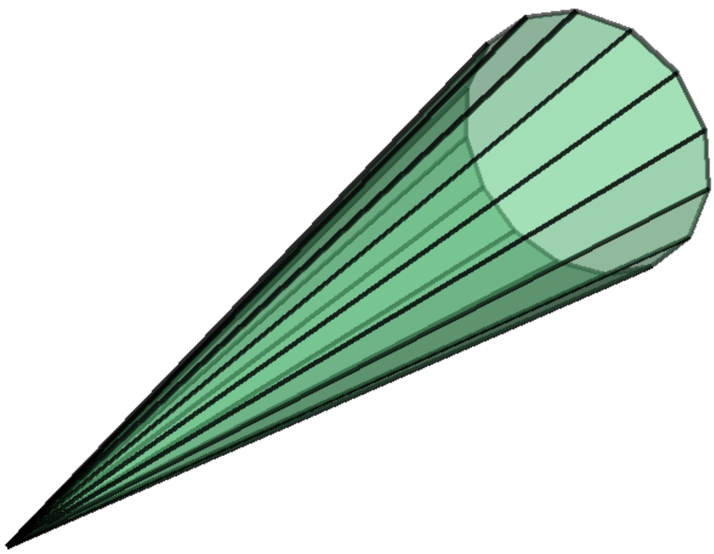
($\operatorname{int}(X)$: Menge der inneren Punkte von $X \subseteq \mathbb{R}^n$)



# Polyederische Kegel

**Definition 2.40**

Ein **polyedrischer Kegel** ist ein Kegel, der ein Polyeder ist.



# Eigenschaften polyedrischer Kegel, Beispiele

**Bemerkung 2.41**

*Eine Menge* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn es eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *gibt mit* $K = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_n)$.

**Bemerkung 2.42**

*Polyedrische Kegel sind konvex und abgeschlossen.*

**Bemerkung 2.43**

*Die Polaren von endlich erzeugten Kegeln sind polyedrische Kegel.*



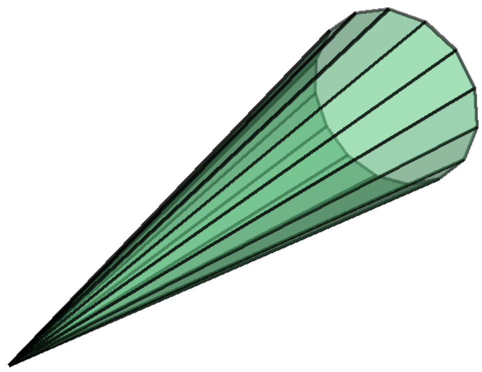
# Polyedrische vs. endlich erzeugte Kegel

**Lemma 2.44**

*Jeder polyedrische Kegel ist endlich erzeugt.*

**Satz 2.45**

*Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.*



# Verstärkung von Lemma 2.44

**Definition**

Für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- $\delta(M) = \{\det M_{I \times J} \mid I \subseteq [m], J \subseteq [n], |I| = |J|\}$
- $\Delta(M) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \delta(M) \cup (-\delta(M)), q \neq 0\}$

**Lemma 2.44**$^\star$

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt es $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit

$$\mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}) = \operatorname{ccone}(X)\,.$$



# Für den Beweis von Lemma 2.44$^\star$

**Per Induktion nach $p = 0, 1, \ldots$:**

Für alle $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ (mit $p + q \geq 1$, $n \geq 1$) und $A = \binom{B}{C} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times n}$, existiert $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit

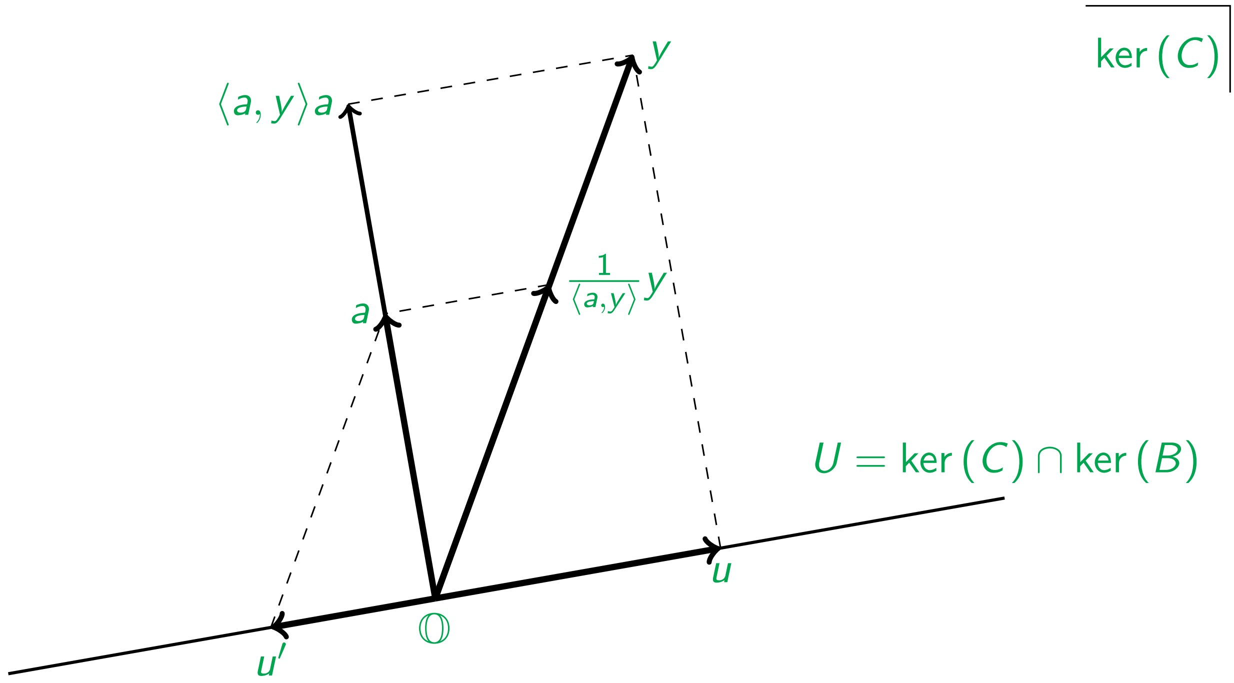
$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq \mathbb{O}_p, Cx = \mathbb{O}_q\} = \operatorname{ccone} X\,.$$

**Lemma 2.44a**

Seien $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ (mit $p + q \geq 1$, $n \geq 1$), $A = \binom{B}{C} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times n}$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq \mathbb{O}_p, Cx = \mathbb{O}_q\}$.

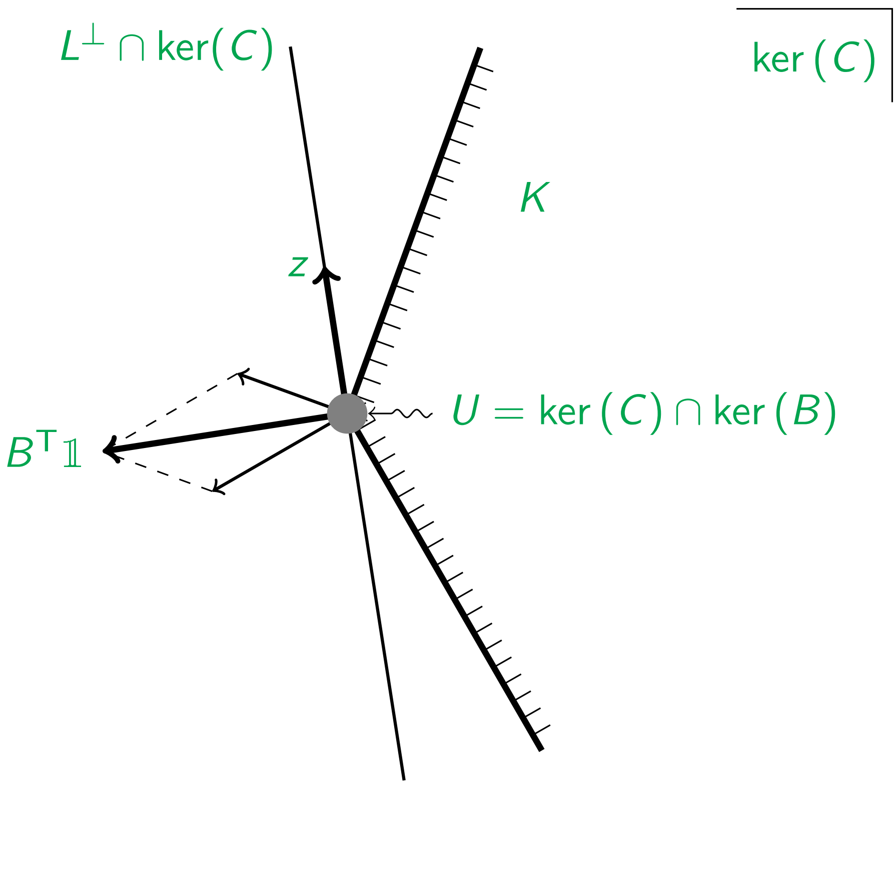
1. Falls $\dim(\ker(B) \cap \ker(C)) \geq \dim(\ker(C)) - 1$:
   Es gibt $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit $K = \operatorname{ccone} X$.
2. Andernfalls: Es gibt $z \in \ker(C) \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ mit $z \notin K$, $-z \notin K$.

# Illustration 1 des Beweises von Lemma 2.44a

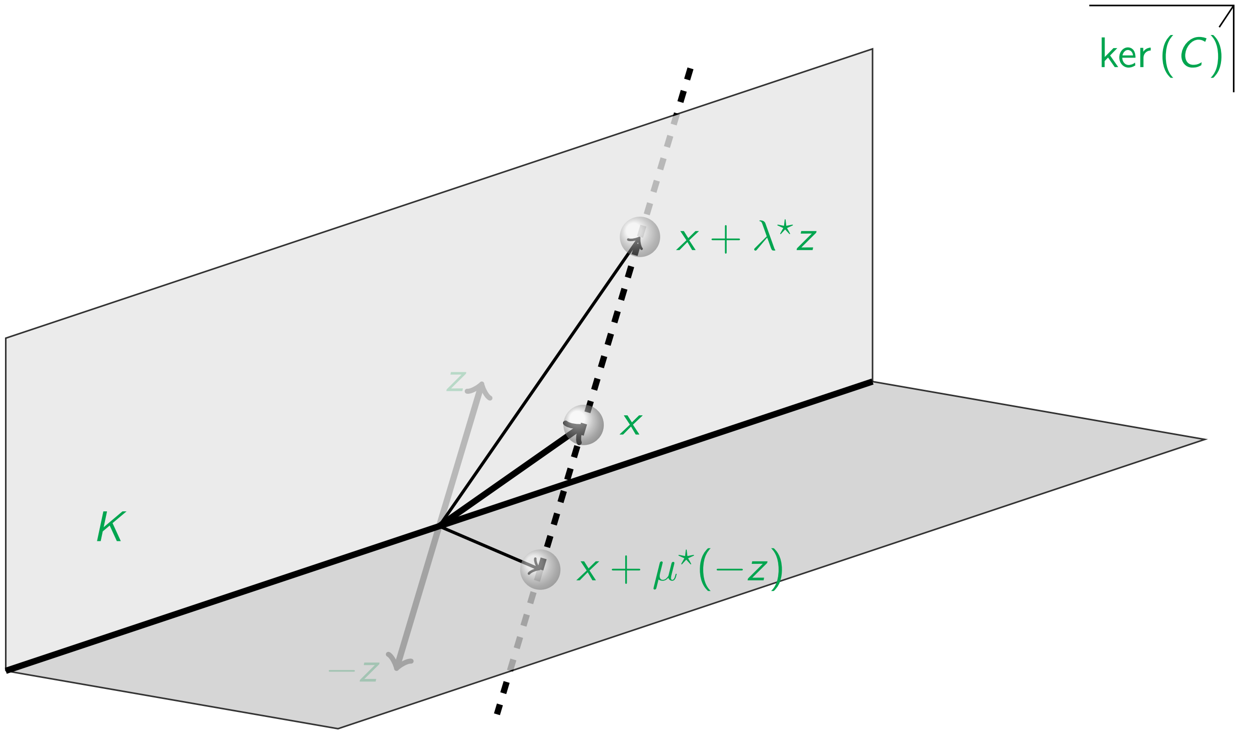





# Illustration 2 des Beweises von Lemma 2.44a



# Illustration des Induktionsschritts (Beweis Lemma 2.44$^\star$)






# Polare von polyedrischen Kegeln

**Satz 2.46**

*Für den polaren Kegel eines polyedrische Kegels* $K = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_m)$ *(mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*) gilt*

$$K^\circ = \operatorname{ccone}\{A_{1,\star}, \ldots, A_{m,\star}\}.$$

*Insbesondere: Die Polaren von polyedrischen Kegeln sind endlich erzeugt.*

**Korollar 2.47**

*Sind* $K_1, \ldots, K_q \subseteq \mathbb{R}^n$ *polyedrische Kegel, so ist*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{q} K_i\right)^\circ = \sum_{i=1}^{q} K_i^\circ.$$

# Farkas-Lemma

**Lemma 2.48**

*Sind* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$ *so, dass* $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) = \varnothing$ *gilt, so gibt es*

$$\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \quad \textit{mit} \quad \lambda^{\mathsf{T}} A = \mathbb{O}_n^{\mathsf{T}} \textit{ und } \langle \lambda, b \rangle = -1.$$

**Satz 2.49**

*Für alle* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$ *gilt: Entweder ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\} \neq \varnothing$$

*oder es ist*

$$\{y \in \mathbb{R}^m \,|\, A^{\mathsf{T}} y = \mathbb{O}_n, \langle b, y \rangle = -1, y \geq \mathbb{O}_m\} \neq \varnothing$$

*(aber nicht beides).*