# Vorlesung **Einführung in die Mathematische Optimierung** (Wintersemester 2013/14)

Kapitel 5: Die Geometrie der Linearen Optimierung

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 9. Dezember 2013)

# Gliederung

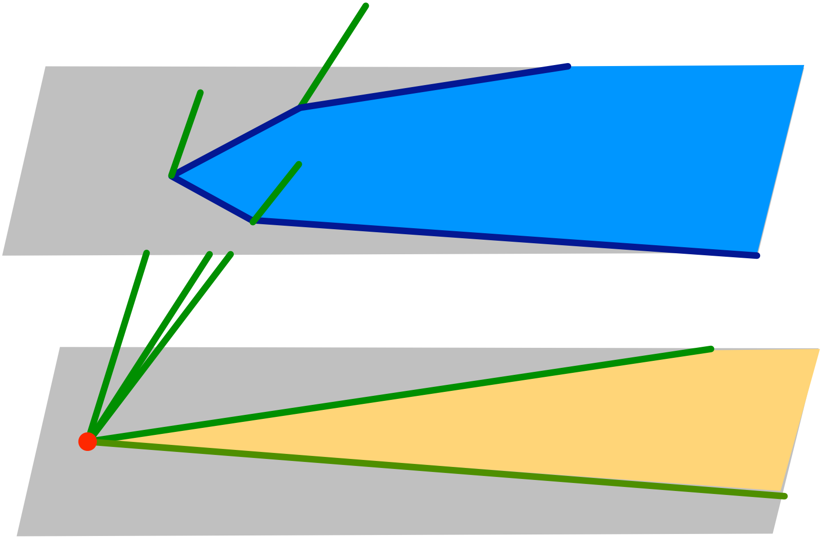
Das Dekompositionstheorem für Polyeder

Affine Hüllen und Dimension von Polyedern

Seiten von Polyedern

Irredundante Darstellungen von Polyedern

# Homogenisierung von Polyedern



# Theoreme von Weyl/Minkowski

## Satz 5.1 (Dekompositionssatz für Polyeder)

*Eine Menge* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein Polyeder, wenn man sie als*

$$P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U$$

*mit endlichen Mengen* $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *darstellen kann; ein Polyeder* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann* **rational** *(d.h. durch ein lineares Ungleichungssystem mit rationalen Koeffizienten definierbar), wenn man* $U$ *und* $V$ *in der Darstellung als Mengen* $U, V \subseteq \mathbb{Q}^n$ *rationaler Vektoren wählen kann.*

## Bezeichnungen

- $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$: **Äußere Darstellung**
- $P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U$: **Innere Darstellung**

# Kodierungslängen

**Bemerkung 5.2**

*Sind $A$ und $b$ rational, so kann man rationale $U$ und $V$ so wählen, dass die Kodierungslänge jeder Komponente eines Vektors in $V \cup U$ polynomial in der maximalen Kodierungslänge eines Eintrags in $(A, b)$ beschränkt ist ($|V \cup U|$ lässt sich aber i.a. nicht polynomial in der Kodierungslänge von $(A, b)$ beschränken).*

**Bemerkung 5.3**

*Sind $V$ und $U$ rational, so kann man rationale $A$ und $b$ so wählen, dass die Kodierungslänge jeden Eintrags in $(A, b)$ polynomial in der maximalen Kodierungslänge einer Komponente eines Vektors aus $V \cup U$ beschränkt ist (die Anzahl der Ungleichungen in $Ax \leq b$ lässt sich aber i.a. nicht polynomial in der Kodierungslänge von $V \cup U$ beschränken).*

# Lineare Optimierung und innere Darstellungen

## Bemerkung 5.4

*Sind* $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *endliche Mengen und* $c \in \mathbb{R}^n$, *so ist das Optimierungsproblem*

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid x \in P\} \quad \text{mit} \quad P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U \tag{1}$$

*genau dann unzulässig, wenn* $V = \varnothing$ *ist. Andernfalls ist* (1) *genau dann unbeschränkt, wenn* $\langle c, u\rangle > 0$ *für ein* $u \in U$ *ist, und falls kein solches* $u$ *existiert, ist jedes* $v^\star \in V$ *aus der endlichen Menge* $V$ *mit* $\langle c, v^\star\rangle = \max\{\langle c, v\rangle \mid v \in V\}$ *eine Optimallösung von* (1).

# Konsequenzen

## Polynomiale Zertifikate

- Ist ein lineares Optimierungsproblem mit rationalen Daten weder unzulässig noch unbeschränkt, so hat es eine (rationale) Optimallösung, deren Kodierungslänge polynomial in der Kodierungslänge der Problems beschränkt ist.
- Außerdem kann man (via starker Dualität) die Optimalität einer solchen Optimallösung in polynomialer Zeit beweisen.
- Das Entscheidungsproblem „Ist $Ax \leq b$ lösbar" (für rationale $A$, $b$) ist in $\mathrm{NP} \cap \mathrm{coNP}$ (**gute Charakterisierung**).

# Charakteristischer Kegel / Rezessionskegel

**Definition 5.5**

Der **charakteristische Kegel** (**Rezessionskegel**) eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{char}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x + y \in P \text{ für alle } x \in P\}$.

**Definition 5.6**

Konvexe Hüllen von *endlichen* Punktmengen heißen **Polytope**.

**Bemerkung 5.7**

*Polyeder sind also genau die Minkowski-Summen eines Polytops und eines polyedrischen Kegels.*

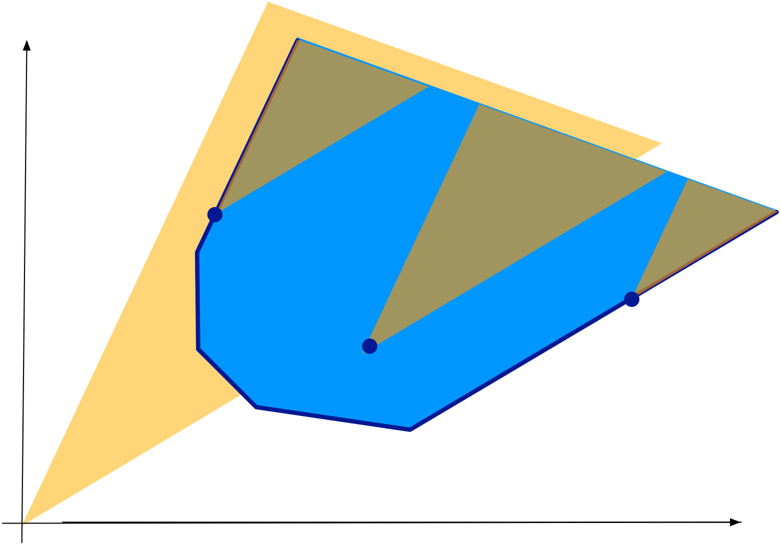
# Charakterisierung des charakteristischern Kegels

**Satz 5.8**

*Für jedes nicht-leere Polyeder* $\varnothing \neq P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b) = Q + K$ *(mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m}$, *einem Polytop* $Q \subseteq \mathbb{R}^{n}$ *und einem polyedrischen Kegel* $K \subseteq \mathbb{R}^{n}$*) gelten:*

1. $\operatorname{char}(P) = K$
2. $\operatorname{char}(P) = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_m)$
3. $\operatorname{char}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x^\star + \operatorname{ccone}\{y\} \subseteq P\}$ *für alle* $x^\star \in P$

# Beispiel



# Polytope

**Bemerkung 5.9**

*Für nicht leere Polyeder* $P \subseteq \mathbb{R}^n$ *sind folgende Aussagen paarweise äquivalent:*

1. $P$ *ist ein beschränktes Polyeder.*
2. $\mathrm{char}(P) = \{\mathbb{O}_n\}$
3. $P$ *ist ein Polytop.*

# Der Linealitätsraum

**Definition 5.10**

1. Der **Linealitätsraum** eines konvexen Kegels $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{lineal}(K) = \{y \in K \mid -y \in K\} = K \cap (-K)\,,$$

der größte in $K$ enthaltene lineare Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

2. Der **Linealitätsraum** eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist
$$\operatorname{lineal}(P) = \operatorname{lineal}(\operatorname{char}(P)).$$

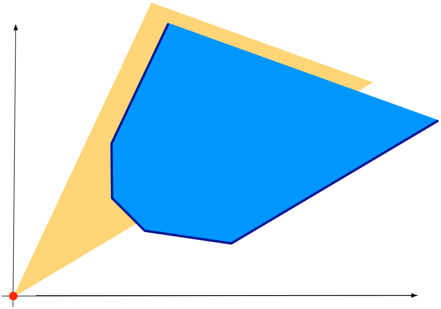
3. Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist **spitz**, wenn sein Linealitätsraum $\operatorname{lineal}(P) = \{\mathbb{O}_n\}$ trivial ist. (Spitze Polyeder sind nicht leer ($n \geq 1$).)

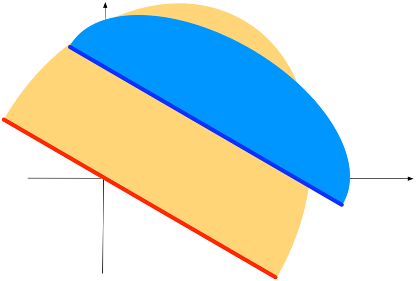
**Satz 5.11**

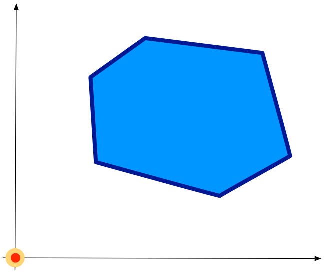
*Für Polyeder $\varnothing \neq P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) gelten:*

1. $\operatorname{lineal}(P) = \ker A$
2. $\operatorname{lineal}(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid x^\star + \operatorname{lin}\{y\} \subseteq P\}$ *für alle* $x^\star \in P$

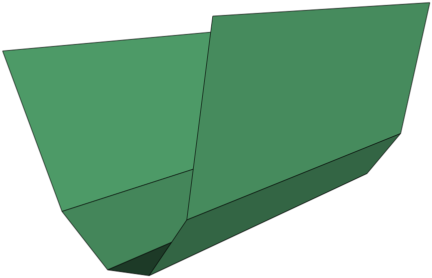
# Beispiele

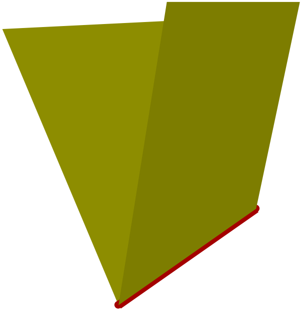






# Beispiele





# Affine Hülle und Dimension

## Satz 5.12

*Für jedes nicht leere Polyeder* $\varnothing \neq P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *(mit* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$*) ist*

$$\operatorname{aff} P = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathrm{Eq}(P),\star}x = b_{\mathrm{Eq}(P)}\right\}.$$

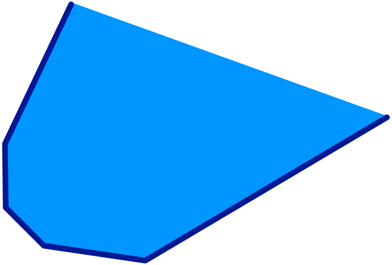
*Insbesondere ist die* **Dimension** *von* $P$

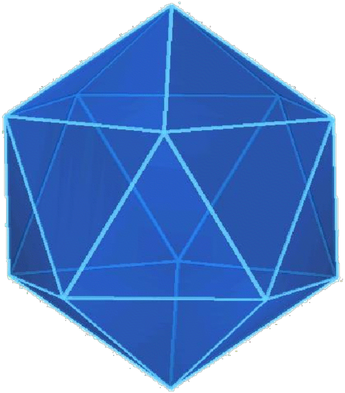
$$\dim P = \dim \operatorname{aff} P = n - \operatorname{rang}(A_{\mathrm{Eq}(P),\star}).$$

## Dabei ist...

$$\mathrm{Eq}(P) = \mathrm{Eq}_{Ax\leq b}(P) = \{i \in [m] \mid \langle A_{i,\star}, x\rangle = b_i \text{ für alle } x \in P\}$$

# Beispiele





# Seiten

## Definition 5.13

Die **Seiten** des Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ sind $\varnothing$, $P$ und alle Teilmengen $F \subseteq P$ mit $F = P \cap \mathrm{H}^{=}(a, \beta)$ für $P$ enthaltende Halbräume $\mathrm{H}^{\leq}(a, \beta) \supseteq P$ (mit $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$). Die Ungleichung $\langle a, x \rangle \leq \beta$ **definiert die Seite** $F$.

## Bemerkung 5.14

1. *$\varnothing$ und $P$ sind die* **trivialen Seiten** *von $P$.*
2. *Seiten von Polyedern sind Polyeder.*
3. *Die Menge der Optimallösungen eines (weder unzulässigen noch unbeschränkten) linearen Optimierungsproblems*
$$\gamma = \max\{\langle c, x \rangle \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$
*ist genau die durch $\langle c, x \rangle \leq \gamma$ definierte Seite von $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$.*

# Implizierte Ungleichungen

## Satz 5.15

*Eine Ungleichung* $\langle a, x\rangle \leq \beta$ *(mit* $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$*) ist genau dann gültig für ein nicht-leeres Polyeder* $\varnothing \neq \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *mit* $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *(*$Ax \leq b$ **impliziert** $\langle a, x\rangle \leq \beta$*), wenn es* $y \in \mathbb{R}^m_+$ *gibt mit*

$$y^{\mathsf{T}} A = a \quad \text{und} \quad \langle y, b\rangle \leq \beta\,.$$

# Äußere Darstellung von Seiten

**Satz 5.16**

*Sei* $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$.

1. *Die Seiten von* $P$ *sind genau die Mengen* $\{x \in P \mid A_{I,\star}x = b_I\}$ *für alle* $I \subseteq [m]$ *und die leere Seite.*
2. *Für jede nicht-leere Seite* $F$ *von* $P$ *gilt*
$$F = \{x \in P \mid A_{\mathrm{Eq}(F),\star}x = b_{\mathrm{Eq}(F)}\}.$$
*Die Dimension von* $F$ *ist* $\dim F = n - \operatorname{rang}(A_{\mathrm{Eq}(F),\star})$.
3. *Der Schnitt zweier Seiten von* $P$ *ist eine Seite von* $P$.
4. *Seiten von Seiten von* $P$ *sind Seiten von* $P$.
5. *Die nicht-leeren Seiten von* $P$ *haben Dimensionen zwischen* $\dim \operatorname{lineal}(P)$ *und* $\dim P$ *(einschließlich).*

**Dabei ist...**

$$\mathrm{Eq}(F) = \mathrm{Eq}_{Ax \leq b}(F) = \{i \in [m] \mid \langle A_{i,\star}, x\rangle = b_i \text{ für alle } x \in F\}$$

# Innere Darstellung von Seiten

## Satz 5.17

*Seien* $P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U$ *mit endlichen Mengen* $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $F$ *eine von* $\langle a, x \rangle \leq \beta$ *definierte Seite von* $P$*.*

1. $F = \operatorname{conv}\{v \in V \mid \langle a, v \rangle = \beta\} + \operatorname{ccone}\{u \in U \mid \langle a, u \rangle = 0\}$
2. *Falls* $F \neq \varnothing$*:*
   - $\operatorname{char}(F) = \operatorname{char}(P) \cap \mathrm{H}^{=}(a, 0)$ *(die von* $\langle a, x \rangle \leq 0$ *definierte Seite von* $\operatorname{char}(P)$*)*
   - $\operatorname{lineal}(F) = \operatorname{lineal}(P)$

## Bemerkung 5.18

*Jedes Polyeder hat endlich viele Seiten.*

# Irredundante äußere Darstellungen

**Definition 5.19**

Eine **irredundante äußere Darstellung** eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein System $A^{(1)}x = b^{(1)}$, $A^{(2)}x \leq b^{(2)}$ (mit $A^{(1)} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$, $b^{(1)} \in \mathbb{R}^{m_1}$, $A^{(2)} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, $b^{(2)} \in \mathbb{R}^{m_2}$) mit

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{(1)}x = b^{(1)}, A^{(2)}x \leq b^{(2)}\},$$

so dass jedes echte Untersystem von $A^{(1)}x = b^{(1)}$, $A^{(2)}x \leq b^{(2)}$ ein größeres Polyeder als $P$ definiert und für kein $i \in [m_2]$ die Gleichung $\langle A^{(2)}{}_{i,\star}, x\rangle = b_i$ gültig für $P$ ist.

# Facetten

**Definition 5.20**

Die inklusionsmaximalen unter den nicht-trivialen Seiten eines Polyeders sind seine **Facetten**.

**Satz 5.21**

*Eine nicht-triviale Seite* $F$ *eines Polyeders* $P$ *ist genau dann eine Facette von* $P$, *wenn* $\dim F = \dim P - 1$ *ist.*

# Charakterisierung irredundanter äußerer Darstellungen

## Satz 5.22

*Ist* $P \neq \varnothing$ *ein nicht-leeres Polyeder, so ist ein System*

$$A^{(1)}x = b^{(1)}, A^{(2)}x \leq b^{(2)}$$

*genau dann eine irredundante äußere Darstellung von* $P$*, wenn*

1. $\operatorname{aff} P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^{(1)}x = b^{(1)}\}$ *ist,*
2. *die Matrix* $A^{(1)}$ *vollen Zeilenrang hat,*
3. *jede Ungleichung in* $A^{(2)}x \leq b^{(2)}$ *eine Facette von* $P$ *definiert*
4. *und jede Facette von* $P$ *von genau einer Ungleichung aus* $A^{(2)}x \leq b^{(2)}$ *definiert wird.*

# Irredundante innere Darstellungen

**Definition 5.23**

Eine **irredundante innere Darstellung** eines Polyeders $P \subseteq \mathbb{R}^n$ besteht aus endlichen Mengen $V, U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U + \operatorname{lineal}(P)\,,$$

so dass für alle echten Teilmengen $\tilde{V} \subsetneq V$ und $\tilde{U} \subsetneq U$

$$P \supsetneq \operatorname{conv} \tilde{V} + \operatorname{ccone} U + \operatorname{lineal}(P)$$

und

$$P \supsetneq \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} \tilde{U} + \operatorname{lineal}(P)$$

ist.

# Minimale Seiten von Polyedern

**Definition 5.24**

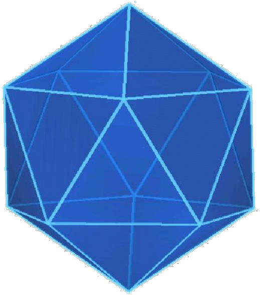
Die inklusionsminimalen unter den nicht-leeren Seiten eines Polyeders sind seine **minimalen Seiten**.

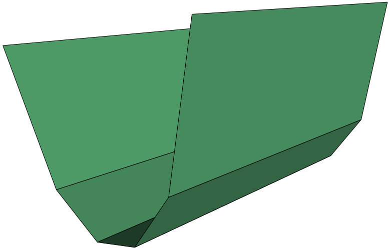
**Satz 5.25**

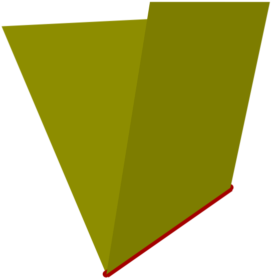
*Für eine nicht-leere Seite $F \neq \varnothing$ eines Polyeders $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) sind folgende Aussagen paarweise äquivalent (mit $\mathrm{Eq}(F) = \mathrm{Eq}_{Ax \leq b}(F)$):*

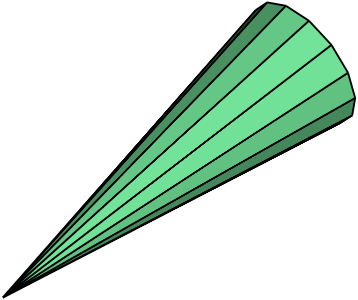
1. *$F$ ist eine minimale Seite von $P$.*
2. $F = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathrm{Eq}(F),\star} x = b_{\mathrm{Eq}(F)}\}$
3. $F = \{x^\star\} + \mathrm{lineal}(P)$ *für alle* $x^\star \in F$
4. $\dim F = \dim \mathrm{lineal}(P)$

# Beispiele









# Echte minimale Seiten von polyederischen Kegeln

## Definition 5.26

Die inklusionsminimalen unter den vom Linealitätsraum verschiedenen Seiten eines polyederischen Kegels sind seine **echten minimalen Seiten**.

## Satz 5.27

*Für eine nicht-leere Seite $G \neq \varnothing$ eines polyedrischen Kegels $K = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_m)$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) sind folgende Aussagen paarweise äquivalent (mit $\mathrm{Eq}(G) = \mathrm{Eq}_{Ax \leq \mathbb{O}_m}(G)$):*

1. $G$ *ist eine echte minimale Seite von* $K$.
2. $G = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_{\mathrm{Eq}(G),\star} x = \mathbb{O}_{\mathrm{Eq}(G)}, \langle A_{i,\star}, x \rangle \leq 0\}$ *für alle* $i \in [m] \setminus \mathrm{Eq}(G)$
3. $G = \mathrm{ccone}\{x^\star\} + \mathrm{lineal}(K)$ *für alle* $x^\star \in G \setminus \mathrm{lineal}(K)$
4. $\dim G = \dim \mathrm{lineal}(K) + 1$

# Ecken und Extremalstrahlen

**Definition 5.28**

1. Die ($0$-dimensionalen) minimalen Seiten $\{v\}$ (oder auch $v$ selbst) eines (spitzen) Polyeders sind seine **Ecken**.
2. Die ($1$-dimensionalen) echten minimalen Seiten eines (spitzen) polyederischen Kegels sind seine **Extremalstrahlen**. Die von $\mathbb{O}$ verschiedenen Vektoren in einem Extremalstrahl sind seine **Erzeuger**.

**Bemerkung 5.29**

*Ein Punkt $v \in P$ in einem Polyeder $P$ ist genau dann eine Ecke von $P$, wenn $v \notin \operatorname{conv}(P \setminus \{v\})$ ist, d.h., wenn $v$ ein* **Extremalpunkt** *von $P$ ist.*

# Charakterisierung irredundanter innerer Darstellungen

**Satz 5.30**

*Für ein nicht-leeres Polyeder $P$ und zwei endliche Mengen $V \subseteq P$ und $U \subseteq \operatorname{char}(P)$ ist*

$$P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U + \operatorname{lineal}(P)$$

*genau dann eine irredundante innere Darstellung von $P$, wenn*

1. *$V$ aus jeder minimalen Seite von $P$ genau einen Punkt und*
2. *$U$ aus jeder echten minimalen Seite von $\operatorname{char}(P)$ genau einen nicht in $\operatorname{lineal}(P)$ liegenden Vektor*

*enthalten.*

# Folgerungen für spitze Polyeder

**Korollar 5.31**

*Für spitze Polyeder $P$ und endliche Mengen $V \subseteq P$ und $U \subseteq \operatorname{char}(P)$ ist also genau dann $P = \operatorname{conv} V + \operatorname{ccone} U$, wenn $V$ alle Ecken und $U$ Erzeuger aller Extremalstrahlen von $\operatorname{char}(P)$ enthält.*

**Korollar 5.32**

*Ein lineares Optimierungsproblem über einem spitzen Polyeder ist unbeschränkt oder nimmt sein Optimum in einer Ecke des Polyeders an.*

**Korollar 5.33**

*Eine spitzes Polyeder ist genau dann rational, wenn es nur rationale Ecken hat und sein charakteristischer Kegel nur rationale Extremalstrahlen besitzt.*