Vorlesung
Einführung in die Mathematische Optimierung

(Wintersemester 2013/14)

Kapitel 6: Der Simplex-Algorithmus

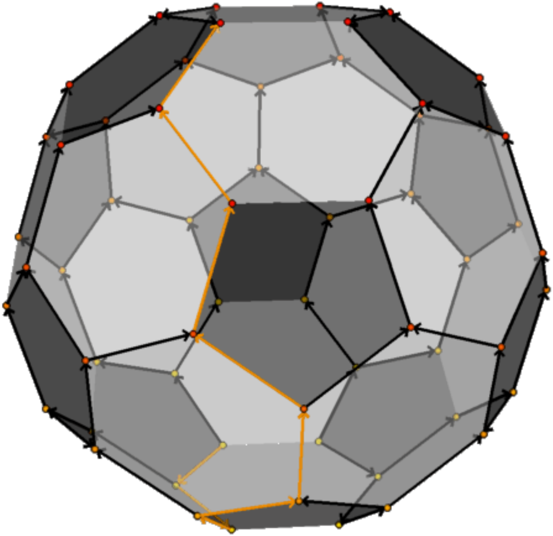
Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 20. Dezember 2013)

Gliederung

Das Bild

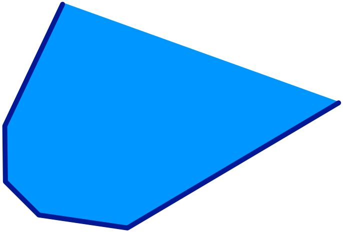


[Bild: Marc Pfetsch, TU Braunschweig]

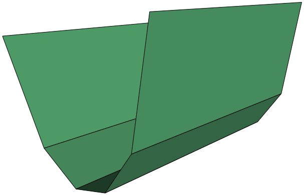
Ecken

Erinnerung

- Ein Polyeder $P \neq \varnothing$ heißt **spitz**, wenn $\mathrm{lineal}(P) = \{\mathbb{O}\}$ ist. **Ecken** sind die minimalen Seiten eines spitzen Polyeders.
- Spitze Polyeder sind nicht-leer. Die Ecken eines Polyeders P sind seine null-dimensionalen (d.h. einpunktigen) Seiten. Ist $\{v\}$ eine Ecke von P, so nennen wir auch den Punkt v eine Ecke von P.



spitz



nicht spitz

Ecken und Lineare Optimierung

Folgerungen

- Sind $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ spitz und (LP) $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ nicht unbeschränkt, so nimmt (LP) sein Optimum in einer Ecke von $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ an (Kor. 5.32).
- (Eine solche optimale Ecke kann mit polynomialen Algorithmen für lineare Optimierungsprobleme in polynomialer Zeit bestimmt werden.)
- Ist $P \subseteq \mathbb{R}^n_+$ ein Polyeder, so ist P spitz oder $P = \varnothing$.
- Jedes lineare Optimierungsproblem kann in die Form

$$\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Cx \leq d, x \in \mathbb{R}^n_+\}$$

gebracht werden.

Charakterisierungen von Ecken

Satz 6.1

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *und* $v \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *sind folgende Aussagen paarweise äquivalent (mit* $\mathrm{Eq}(v) = \{i \in [m] : \langle A_{i,\star}, v\rangle = b_i\}$*):*

1. v *ist eine Ecke von* $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$.
2. $\{v\} = \{x \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b) : A_{\mathrm{Eq}(v),\star}x = b_{\mathrm{Eq}(v)}\}$
3. $\{v\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A_{\mathrm{Eq}(v),\star}x = b_{\mathrm{Eq}(v)}\}$
4. $\mathrm{rang}(A_{\mathrm{Eq}(v),\star}) = n$
5. *Für alle* $x, y \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b) \setminus \{v\}$ *gilt* $v \notin \mathrm{conv}\{x, y\}$.

Eindimensionale Seiten spitzer Polyeder

Definition 6.2

Eine eindimensionale Seite F eines spitzen Polyeders P heißt eine **Kante** von P, wenn F beschränkt ist, und ein **Extremalstrahl** von P, wenn F unbeschränkt ist.

Bemerkung 6.3

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein spitzes Polyeder.

1. *Zu einer Kante E von P gibt es genau zwei Ecken v und w von P mit $E = \operatorname{conv}\{v, w\}$; v und w heißen dann* **Nachbarn** *voneinander.*
2. *Zu einem Extremalstrahl R von P gibt es genau eine Ecke v von P und ein $y \in \operatorname{char}(P) \setminus \{\mathbb{O}\}$ mit $R = v + \operatorname{cone}(y)$.*

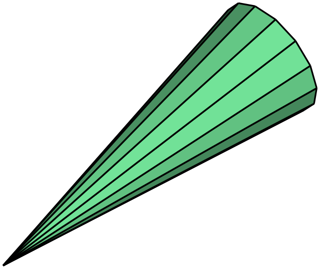
Extremalstrahlen von polyedrischen Kegeln

Bemerkung 6.4

Ist $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein spitzer polyedrischer Kegel, so ist* $\mathbb{O}_n$ *die einzige Ecke von* K. *Sind* $y^{(1)}, \dots, y^{(r)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *so, dass* $\mathrm{cone}(y^{(1)}),\dots,\mathrm{cone}(y^{(r)})$ *die Extremalstrahlen von* K *sind, so ist*

$$K = \mathrm{ccone}\{y^{(1)}, \dots, y^{(r)}\} .$$

(Die Extremalstrahlen sind die minimalen echten Seiten von K.*)*



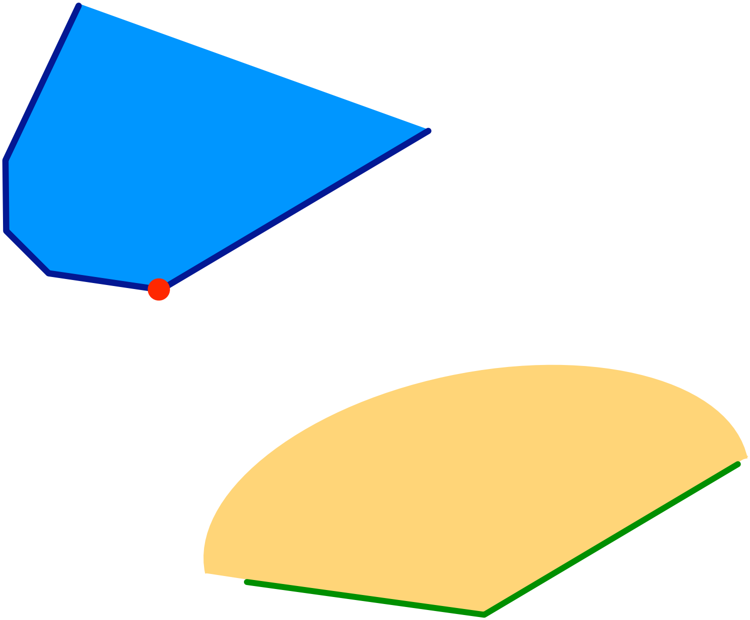
Der Radialkegel einer Ecke

Satz 6.5

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ *und* v *eine Ecke von* $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$. *Dann gelten für* $\mathrm{K}_v(P) = \mathrm{cone}\,(P - v)$ *und* $\mathrm{N}_v(P) = (\mathrm{K}_v(P))^\circ$:

1. $\mathrm{K}_v(P) = \{y \in \mathbb{R}^n : A_{\mathrm{Eq}(v),\star} y \leq \mathbb{O}_{\mathrm{Eq}(v)}\}$
2. *Sind* $w^{(1)}, \dots, w^{(s)} \in P$ *die Nachbarn von* v *in* P *und* $v + \mathrm{cone}(y^{(1)}), \dots, v + \mathrm{cone}(y^{(t)})$ *die Extremalstrahlen von* P, *deren Ecke* v *ist (mit* $y^{(1)}, \dots y^{(t)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$*), so sind*
$$\mathrm{cone}\,(w^{(1)} - v), \dots, \mathrm{cone}\,(w^{(s)} - v),$$
$$\mathrm{cone}\,(y^{(1)}), \dots, \mathrm{cone}\,(y^{(t)})$$
die Extremalstrahlen von $\mathrm{K}_v(P)$. *Insbesondere ist dann*
$$\mathrm{N}_v(P) = \Big\{ z \in \mathbb{R}^n : \langle z, w^{(i)} \rangle \leq \langle z, v \rangle \text{ für alle } i \in [s], \quad \langle z, y^{(i)} \rangle \leq 0 \text{ für alle } i \in [t] \Big\}.$$

Beispiel



In einer Ecke

Korollar 6.6

Für alle $v \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *und* $c \in \mathbb{R}^n$ *gilt:* v *ist genau dann Optimallösung von* $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$, *wenn* $c \in \operatorname{ccone}\{A_{i,\star} : i \in \mathrm{Eq}(v)\}$ *ist.*

Korollar 6.7

(Mit den Notationen aus Satz 6.5)
Ist $c \in \mathbb{R}^n$, *so gilt für (LP)* $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$ *wenigstens eine der drei Aussagen:*

1. v *ist Optimallösung von (LP).*
2. *Es gibt einen Nachbarn* $w^{(i)}$ *(*$i \in [s]$*) von* v *mit* $\langle c, v\rangle < \langle c, w^{(i)}\rangle$.
3. *Es gibt ein* $y^{(i)}$ *(*$i \in [t]$*) mit* $\langle c, y^{(i)}\rangle > 0$ *(also ist (LP) unbeschränkt).*

Der Simplex-Algorithmus (geometrisch)

- Eingabe: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$, $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$
- Ausgabe: Eine Optimallösung von
  $$\text{(LP)} \max\{\langle c, x\rangle \; : \; Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\}$$
  oder die Feststellung, dass (LP) unbeschränkt ist.
- **Annahme:** Wir kennen eine Ecke v von P

1. Finde ein $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$, so dass $\mathrm{cone}\,(y)$ Extremalstrahl von $\mathrm{K}_v(P)$ ist mit $\langle c, y\rangle > 0$ (Fall A) oder stelle fest, dass kein solches y existiert (Fall B).
2. Fall B: STOP ("v ist eine Optimallösung von (LP)")
3. Fall A:
   - Falls $Ay \leq \mathbb{O}_m$ (also $v + \mathrm{cone}(y)$ Extremalstrahl von P): STOP ("(LP) unbeschränkt")
   - Sonst: $w = v + \max\{\lambda \in \mathbb{R}_+ \; : \; v + \lambda y \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b)\}y$ Nachbar von v mit $\langle c, v\rangle < \langle c, w\rangle$ (es gilt $\mathrm{cone}(y) = \mathrm{cone}(w - v)$) Setze $v \leftarrow w$ und gehe zu Schritt 1.

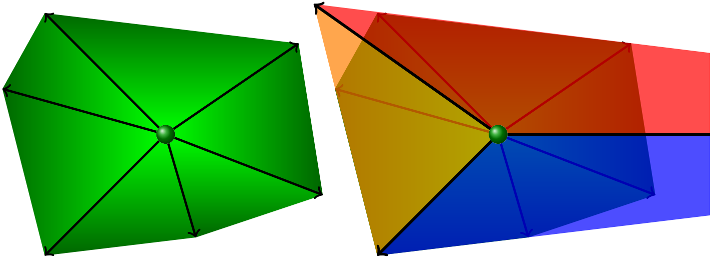
(Endet, weil P endlich viele Ecken hat.)

Bemerkungen und Fragen

- Wie führt man Schritt 1 algebraisch aus? (I)
- Welchen Extremalstrahl wählt man in Schritt 1, wenn mehrere in Frage kommen? (II)
- Wie findet man eine Startecke?
  - Originalproblem: (LP) $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b\}$
  - Transformation in: (LP') $\max\{\langle f, z\rangle : Bz \leq d, z \leq \mathbb{O}\}$ (mit $B \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $d \in \mathbb{Q}^m$, $f \in \mathbb{Q}^n$)
  - Hilfsproblem:
    $$\text{(AUX)} \max\{\langle \mathbb{1}_m, s\rangle : Bz + s \leq d, z \leq \mathbb{O}_n, s \leq \mathbb{O}_m\}$$
  - Definiere $s^{(\text{start})} \in \mathbb{Q}^m$ via $s_i^{(\text{start})} := \min\{d_i, 0\}$ ($i \in [m]$)
  - $(\mathbb{O}_n, s^{(\text{start})})$ ist Ecke des für (AUX) zulässigen Polyeders.
  - Simplex-Algorithmus $\rightsquigarrow$ optimale Ecke $(z^\star, s^\star)$ für (AUX).
  - Falls $s^\star \neq \mathbb{O}_m$: (LP')/(LP) unzulässig
  - Sonst: $z^\star$ Startecke für Simplex-Algorithmus für (LP')

Spitze Kegel

- Sei $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ so, dass $K = \{y \in \mathbb{R}^n : Ay \leq \mathbb{O}_p\}$ spitz ist (also $\text{rang}(A) = n$).
- Sei $I \subseteq [p]$ ($|I| = n$) so, dass $A_{I,\star}$ regulär ist (I **U-Basis**)
- $K(I) := \{y \in \mathbb{R}^n : A_{I,\star} y \leq \mathbb{O}_I\}$ ist spitz mit $K \subseteq K(I)$.
  "Simplizialer Relaxationskegel"



- Satz von Carathéodory (Satz 2.31) $\rightsquigarrow$
  Wenn $c \in K^\circ = \text{ccone}\{A_{1,\star}, \ldots A_{p,\star}\}$, dann gibt es $I' \subseteq [p]$ mit $\{A_{i,\star} : i \in I'\}$ linear unabhängig und $c \in \text{ccone}\{A_{i,\star} : i \in I'\}$ (also $c \in \big(K(I^\star)\big)^\circ$ für ein $I^\star \supseteq I'$).

Spitze Kegel

- Satz 5.27 impliziert für $y \in \mathbb{R}^n$:

  $\mathrm{cone}(y)$ *ist genau dann Extremalstrahl von* $K(I)$,
  wenn $A_{I,\star} y = -\alpha \mathbb{e}_i$ *für ein* $i \in I$ *und* $\alpha > 0$ *ist.*

- Mit $y^{(i)} = -A_{I,\star}^{-1} \mathbb{e}_i$ (für $i \in I$) sind also $\mathrm{cone}(y^{(i)})$ $(i \in I)$ die Extremalstrahlen von $K(I)$ ($-y^{(i)}$ ist Spalte i von $A_{I,\star}^{-1}$)
- Falls $\langle c, y^{(i)} \rangle \leq 0$ für alle $i \in I$ ("optimal"):

  $\langle c, y \rangle \leq 0$ für alle $y \in K \subseteq K(I)$
- Sonst **wähle** $i_{\mathrm{aus}} \in I$ mit $\langle c, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0$.
- Setze $I^{>} := \{i \in [p] \, : \, \langle A_{i,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0\} \subseteq [p] \setminus I$
- Falls $I^{>} = \varnothing$ ("verbessernde Richtung"):

  $\mathrm{cone}(y^{(i_{\mathrm{aus}})})$ ist Extremalstrahl von K mit $\langle c, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0$
- Sonst **wähle** $i_{\mathrm{ein}} \in I^{>}$ und setze $I_{\mathrm{neu}} := I \setminus \{i_{\mathrm{aus}}\} \cup \{i_{\mathrm{ein}}\}$.
- $A_{I_{\mathrm{neu}},\star}$ ist regulär ($A_{I \setminus \{i_{\mathrm{aus}}\},\star} y^{(i_{\mathrm{aus}})} = \mathbb{O}$, $\langle A_{i_{\mathrm{ein}},\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle \neq 0$).

Bland's Regel

Lemma 6.8

Sei $I(0), I(1), \ldots, I(s)$ *eine gemäß der Regeln auf der vorigen Folie erzeugte Folge von U-Basen* $I(\sigma) \subseteq [p]$*, wobei für jedes* $\sigma \in \{0, 1, \ldots, s-1\}$ *mit* $I = I(\sigma)$ *gelte:*

- $i_{aus} = \min\{i \in I \, : \, \langle c, y^{(i)} \rangle > 0\}$ *(1)*
- $i_{ein} = \min(I^{>})$ *(2)*
- $I(\sigma + 1) = I_{neu}$

Dann sind die U-Basen $I(0), I(1), \ldots, I(s)$ *von* $[p]$ *paarweise verschieden. Insbesondere:* $s \leq \binom{p}{n}$ *(beschränkt in* p *und* n*).*

Bemerkung 6.9

Bland's Regel *(die Auswahlregeln (1) und (2)) sind eine Antwort auf Fragen (I) und (II).*

Der Simplex-Algorithmus (algebraisch)

- Ecke v von $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ und $I \subseteq \mathrm{Eq}(v)$ mit $A_{I,\star}$ regulär (I ist eine **U-Basis von** v)
- ($\mathrm{K}_v(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, A_{\mathrm{Eq}(v),\star} y \leq \mathbb{O}_{\mathrm{Eq}(v)}\}$)

1. Berechne $y^{(i)} = -A_{I,\star}^{-1} \mathbb{e}_i$ (für alle $i \in I$)
2. Falls $\langle c, y^{(i)} \rangle \leq 0$ für alle $i \in I$: STOP ("v Optimallösung")
3. Sonst wähle $i_{\mathrm{aus}} \in \{i \in I \,:\, \langle c, y^{(i)} \rangle > 0\}$. (W-aus)
4. Berechne $I^{>} = \{i \in \mathrm{Eq}(v) \,:\, \langle A_{i,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0\} \subseteq \mathrm{Eq}(v) \setminus I$.
5. Falls $I^{>} \neq \varnothing$:
   - Wähle $i_{\mathrm{ein}} \in I^{>}$. (W-ein)
   - Setze $I \leftarrow I \setminus \{i_{\mathrm{aus}}\} \cup \{i_{\mathrm{ein}}\}$ und gehe zu 1.
6. Sonst ($y^{(i_{\mathrm{aus}})} \in \mathrm{K}_v(P)$ mit $\langle c, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0$):
   - Berechne $I^{>}_{\mathrm{rest}} = \{i \in [m] \setminus \mathrm{Eq}(v) \,:\, \langle A_{i,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0\}$
   - Falls $I^{>}_{\mathrm{rest}} = \varnothing$ ($y^{(i_{\mathrm{aus}})} \in \mathrm{char}(P)$): STOP ("unbeschränkt")
   - Sonst berechne $\lambda_i = \frac{b_i - \langle A_{i,\star}, v \rangle}{\langle A_{i,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle} > 0$ (für alle $i \in I^{>}_{\mathrm{rest}}$)
   - Wähle $i_{\mathrm{ein}} \in I^{>}_{\mathrm{rest}}$ mit $\lambda_{i_{\mathrm{ein}}} = \min\{\lambda_i \,:\, i \in I^{>}_{\mathrm{rest}}\}$.
   - Ersetze $v \leftarrow v + \lambda_{i_{\mathrm{ein}}} y^{(i_{\mathrm{aus}})}$ und $I \leftarrow I \setminus \{i_{\mathrm{aus}}\} \cup \{i_{\mathrm{ein}}\}$, gehe zu 1.

Bemerkungen zur Korrektheit

- Für $I' = I \setminus \{i_{\text{aus}}\}$ und $I_{\text{neu}} = I' \cup \{i_{\text{ein}}\}$ ist $A_{I_{\text{neu}},\star}$ regulär, da $A_{I',\star} y^{(i_{\text{aus}})} = \mathbb{O}_{I'}$, aber $\langle A_{i_{\text{ein}},\star}, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle \neq 0$.
- $\lambda_{i_{\text{ein}}} > 0$ und $\lambda_{i_{\text{ein}}} = \max\{\lambda : v + \lambda y^{(i_{\text{aus}})} \in P\}$
- Für $w = v + \lambda_{i_{\text{ein}}} y^{(i_{\text{aus}})}$ gilt also
  - w ist die Nachbarecke von v mit $\text{cone}(w - v) = \text{cone}(y^{(i_{\text{aus}})})$
  - $I_{\text{neu}} \subseteq \text{Eq}(w)$, $\langle c, w \rangle - \langle c, v \rangle = \lambda_{i_{\text{ein}}} \langle c, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle > 0$

Satz 6.10

Der Simplex-Algorithmus stoppt nach endlich vielen Schritten mit einer korrekten Antwort, wenn man die Wahlen (W-aus) und (W-ein) stets minimal vornimmt (Bland's Regel).

- Es gibt Beispiele, bei denen der Algorithmus bei ungeeigneten Wahlen (W-aus) und (W-ein) nicht endet ($\rightsquigarrow$ Zykeln).
- Andere zykelfreie Strategien: lexikographische Regeln
- Ist das Problem **nicht-degeneriert** (d.h., für alle Ecken v gilt $|\text{Eq}(v)| = n$), so terminiert der Simplex-Algorithmus bei jeder Wahl (W-aus); es gilt dann immer $I^{>} = \varnothing$.

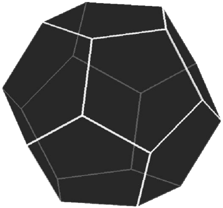
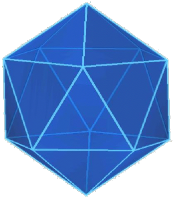
Zertifikate

(P) $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Ax \le b\}$ (D) $\min\{\langle b, u\rangle \,:\, A^{\mathsf{T}} u = c, u \ge \mathbb{O}_m\}$

- Sei $I \subseteq [m]$ eine U-Basis der Ecke $v = A_{I,\star}^{-1} b_I$.
- Also $y^{(i)} = -A_{I,\star}^{-1} \mathbb{e}_i$ für alle $i \in I$.
- Definiere $u \in \mathbb{R}^m$ via $u_i = \begin{cases} -\langle c, y^{(i)}\rangle & (i \in I) \\ 0 & (i \in [m] \setminus I) \end{cases}$
- Gilt: $u_I = \left(A_{I,\star}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c$ und $u_{[m]\setminus I} = \mathbb{O}_{[m]\setminus I}$
- Also: $A^{\mathsf{T}} u = (A_{I,\star})^{\mathsf{T}} u_I = c$
- Und: $\langle b, u\rangle = \langle b_I, u_I\rangle = \langle (A_{I,\star} v, \left(A_{I,\star}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c\rangle$
  $$= v^{\mathsf{T}} (A_{I,\star})^{\mathsf{T}} \left(A_{I,\star}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c = \langle v, c\rangle$$
- STOP ("v Optimallösung"): $\langle c, y^{(i)}\rangle \le 0$ für alle $i \in I$, also $u \ge \mathbb{O}_m$, $A^{\mathsf{T}} u = c$ mit $\langle b, u\rangle = \langle c, v\rangle$ (Optimalitätsbeweis).
- STOP ("unbeschränkt"): $Ay^{(i_{\text{aus}})} \le \mathbb{O}_m$, also (D) unzulässig wegen $\langle c, y^{(i_{\text{aus}})}\rangle > 0$ (Beweis für Unbeschränktheit von (P)).

Voll-dimensionale einfache Polytope

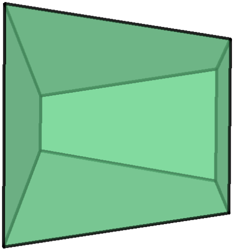
- Sei $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $\dim(P) = n$ und:
  - $Ax \leq b$ ist irredundant (genau eine Ungleichung für jede Facette von P)
  - Jede Ecke hat eine eindeutige Basis (nicht-degeneriert), sie liegt also in genau n Facetten (d.h., P ist **einfach**),

- Sei $\mathcal{N}(v)$ die Menge der Nachbarn der Ecke v und $\mathcal{F}(v)$ die Menge der v enthaltenden Facetten.
- Es gibt eine Bijektion $\Phi : \mathcal{F}(v) \to \mathcal{N}(v)$, so dass jedes $w \in \mathcal{N}(v)$ die Ecke ist, zu der man über die eindeutige v enthaltende Kante kommt, die nicht in der Facette $\Phi(w)$ liegt.

Nicht-degenerierte LPs

- Nicht-Degeneriertheit kann man in der Praxis (und auch für die Theorie) durch Perturbation von b erreichen.
- (W-aus) ist dann die Entscheidung, mit welchem Nachbarn mit größerem Zielfunktionswert man fortfährt.
- Blands Regel: Gehe zu dem verbessernden Nachbarn, den man durch Verlassen der Facette mit niedrigstem Index erreicht.



Klee-Minty Würfel
(hier: Dimension 3)

Bemerkung 6.11

Selbst auf einfachen Polytopen kann der Simplex-Algorithmus mit Blands Regel exponentiell viele Schritte benötigen.

Andere Pivot-Regeln

- Regel des größten Koeffizienten: Wähle i_{aus} so, dass $\langle c, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle$ maximal ist (Dantzigs Original-Regel).
- Regel des größten Fortschritts: Wähle einen Nachbarn w, so dass $\langle c, w \rangle > \langle c, v \rangle$ maximal ist.
- Regel des steilsten Anstiegs: Wähle eine Kante, deren Winkel mit c minimal ist ($\frac{\langle c, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle}{\|c\| \|y^{(i_{\text{aus}})}\|}$ maximal).
- $(\ldots)$

Bemerkung 6.12

Noch nicht einmal für LPs über einfachen Polytopen ist eine Regel bekannt, die polynomiale Laufzeit garantiert. Es gibt polynomiale Average-Case Garantien (für die "Schattenecken-Regel").
In der Praxis: *Häufig sehr effizient (z.B. mit steilstem Anstieg)!*

Gleichungsformat für LPs

Definition 6.13

Ein lineares Optimierungsproblem hat **Gleichungsformat**, wenn es gestellt ist als

$$\max\{\langle c, x\rangle \ : \ Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$$

mit $C \in \mathbb{Q}^{p\times n}$, $d \in \mathbb{Q}^p$.

Bemerkung 6.14

Jedes lineare Optimierungsproblem mit s Variablen und t Nebenbedingungen kann in ein LP im Gleichungsformat (mit $n \leq 2s + t$ und $p = t$) transformiert werden (siehe Übungsblatt 1, Aufgabe 2).

Basen und Basis-Lösungen

Definition 6.15

Seien $C \in \mathbb{Q}^{p \times n}$ und $d \in \mathbb{Q}^p$ (mit $\operatorname{rang}(C) = p$)

- $B \subseteq [n]$ mit $|B| = p$ heißt eine **Basis** von C, wenn $C_{\star,B}$ regulär ist.
- Eine Basis $B \subseteq [n]$ von C ist eine **zulässige Basis** für $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n$, wenn $C_{\star,B}^{-1} d \geq \mathbb{O}_B$ ist.
- Für eine zulässige Basis $B \subseteq [n]$ für $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_p$ heißt $(x_B, x_N) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_N = \mathbb{O}_N$ und $x_B = C_{\star,B}^{-1} d$ die zugehörige **zulässige Basislösung**.

Beobachtung 6.16

Für $C \in \mathbb{Q}^{p \times n}$ und $d \in \mathbb{Q}^p$ (mit $\operatorname{rang}(C) = p$) sind die zulässigen Basislösungen von $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_p$ genau die Ecken des Polyeders $\{x \in \mathbb{R}^n : Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$.

Standard U-Basen

Im folgenden seien stets:

- $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ mit $\operatorname{rang}(C) = p$ und $d \in \mathbb{R}^p$
- $A = \begin{pmatrix} -\mathbb{I}_n \\ C \\ -C \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_n \\ d \\ -d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$
  (mit $m = n + 2p$)
- $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\} = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$

Definition 6.17

Eine **Standard U-Basis** einer Ecke v ist eine U-Basis $I \subseteq [m]$ von v mit $\{n+1, \dots, n+p\} \subseteq I$.

- Für jede Standard U-Basis $I \subseteq [m]$ gilt $I \subseteq [n+p]$.
- Jede Ecke v von P besitzt eine Standard U-Basis (weil $\{n+1, \dots, n+p\} \subseteq \mathrm{Eq}(v)$ und $\operatorname{rang}(C) = p$).

Simplex-Algorithmus mit Standard U-Basen

- Seien $c \in \mathbb{R}^n$ und $I \subseteq [m]$ eine Standard U-Basis der Ecke v.
- Seien $y^{(i)} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ $(i \in I)$ wie im Simplex-Algorithmus.
- Für $K(I) = \{y \in \mathbb{R}^n : A_{I,\star}y \leq \mathbb{O}_I\}$ ist $K(I) \cap \ker(C)$ eine Seite von $K(I)$.
- Also $\mathrm{K}_v(P) \subseteq K(I) \cap \ker(C) = \mathrm{ccone}\,\{y^{(i)} : i \in I \cap [n]\}$
- Daher: Falls $\langle c, y^{(i)} \rangle \leq 0$ für alle $i \in I \cap [n]$ dann $c \in \mathrm{N}_v(P)$.

Beobachtung 6.18

Startet man den Simplex-Algorithmus mit einer Standard U-Basis, und beschränkt man die Überprüfung in Schritt 2 sowie die Auswahl (W-aus) von i_{aus} in Schritt 3 auf $I \cap [n]$, so arbeitet der Simplex-Algorithmus weiterhin korrekt, und er verwendet ausschließlich Standard U-Basen.

Zulässige Basen und Standard U-Basen

Bemerkung 6.19

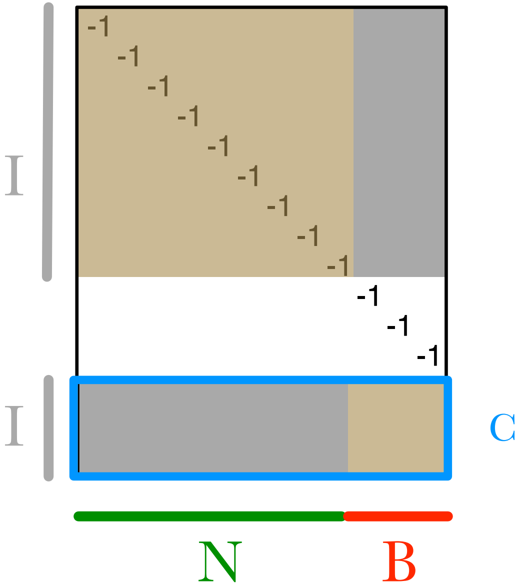
Sei v eine Ecke von P.

1. *Für alle $I \subseteq [m]$ gilt: I ist genau dann eine Standard U-Basis bzgl. $Ax \leq b$ für v, wenn $B(I) = [n] \setminus N(I)$ mit $N(I) = I \cap [n]$ eine zulässige Basis für $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n$ mit Basislösung v ist.*
2. *Für alle $B \subseteq [n]$ gilt: B ist genau dann eine zulässige Basis für $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n$ mit Basislösung v, wenn $I(B) = N \cup \{n+1, \ldots, n+p\}$ mit $N = [n] \setminus B$ eine Standard U-Basis bzgl. $Ax \leq b$ für v ist.*

- **Achtung:**

  Ein $q \in [n]$ ist q genau dann in der U-Basis I, wenn q nicht in der Basis B ist.

Graphisch



Wiederholung: Der Simplex-Algorithmus (algebraisch)

- Ecke v von $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ und $I \subseteq \mathrm{Eq}(v)$ mit $A_{I,\star}$ regulär (I ist eine **U-Basis von** v)
- ($\mathrm{K}_v(P) = \{y \in \mathbb{R}^n \,:\, A_{\mathrm{Eq}(v),\star} y \leq \mathbb{O}_{\mathrm{Eq}(v)}\}$)

1. Berechne $y^{(i)} = -A_{I,\star}^{-1} \mathbb{e}_i$ (für alle $i \in I$)
2. Falls $\langle c, y^{(i)} \rangle \leq 0$ für alle $i \in I$: STOP ("v Optimallösung")
3. Sonst wähle $i_{\text{aus}} \in \{i \in I \,:\, \langle c, y^{(i)} \rangle > 0\}$. (W-aus)
4. Berechne $I^{>} = \{i \in \mathrm{Eq}(v) \,:\, \langle A_{i,\star}, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle > 0\} \subseteq \mathrm{Eq}(v) \setminus I$.
5. Falls $I^{>} \neq \varnothing$:
   - Wähle $i_{\text{ein}} \in I^{>}$. (W-ein)
   - Setze $I \leftarrow I \setminus \{i_{\text{aus}}\} \cup \{i_{\text{ein}}\}$ und gehe zu 1.
6. Sonst ($y^{(i_{\text{aus}})} \in \mathrm{K}_v(P)$ mit $\langle c, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle > 0$):
   - Berechne $I^{>}_{\text{rest}} = \{i \in [m] \setminus \mathrm{Eq}(v) \,:\, \langle A_{i,\star}, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle > 0\}$
   - Falls $I^{>}_{\text{rest}} = \varnothing$ ($y^{(i_{\text{aus}})} \in \mathrm{char}(P)$): STOP ("unbeschränkt")
   - Sonst berechne $\lambda_i = \frac{b_i - \langle A_{i,\star}, v \rangle}{\langle A_{i,\star}, y^{(i_{\text{aus}})} \rangle} > 0$ (für alle $i \in I^{>}_{\text{rest}}$)
   - Wähle $i_{\text{ein}} \in I^{>}_{\text{rest}}$ mit $\lambda_{i_{\text{ein}}} = \min\{\lambda_i \,:\, i \in I^{>}_{\text{rest}}\}$.
   - Ersetze $v \leftarrow v + \lambda_{i_{\text{ein}}} y^{(i_{\text{aus}})}$ und $I \leftarrow I \setminus \{i_{\text{aus}}\} \cup \{i_{\text{ein}}\}$, gehe zu 1.

Der Simplex-Algorithmus (algebraisch, vereinfacht)

- Ecke v von $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ und $I \subseteq \mathrm{Eq}(v)$ mit $A_{I,\star}$ regulär (I ist eine **U-Basis von** v)
- ($\mathrm{K}_v(P) = \{y \in \mathbb{R}^n : A_{\mathrm{Eq}(v),\star} y \leq \mathbb{O}_{\mathrm{Eq}(v)}\}$)

1. Berechne $y^{(i)} = -A_{I,\star}^{-1} \mathbb{e}_i$ (für alle $i \in I$)
2. Falls $\langle c, y^{(i)} \rangle \leq 0$ für alle $i \in I$: STOP ("v Optimallösung")
3. Sonst wähle $i_{\mathrm{aus}} \in \{i \in I : \langle c, y^{(i)} \rangle > 0\}$. (W-aus)
4. Berechne $K^{>} = \{k \in [m] \setminus I : \langle A_{k,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle > 0\}$.
5. Falls $K^{>} = \varnothing$ ($y^{(i_{\mathrm{aus}})} \in \mathrm{char}(P)$): STOP ("unbeschränkt")
6. Sonst berechne $\lambda_k = \frac{b_k - \langle A_{k,\star}, v \rangle}{\langle A_{k,\star}, y^{(i_{\mathrm{aus}})} \rangle} \geq 0$ (für alle $k \in K^{>}$)
7. Wähle $k_{\mathrm{ein}} \in K^{>}$ mit $\lambda_{k_{\mathrm{ein}}} = \min\{\lambda_k : k \in K^{>}\}$. (W-ein)
8. Ersetze $v \leftarrow v + \lambda_{k_{\mathrm{ein}}} y^{(i_{\mathrm{aus}})}$, $I \leftarrow I \setminus \{i_{\mathrm{aus}}\} \cup \{k_{\mathrm{ein}}\}$, gehe zu 1.

Die entscheidenden Daten

- Sei $I \subseteq [m]$ Standard U-Basis der Ecke v mit
$$B = [n] \setminus N \text{ und } N = I \cap [n].$$
- $\bar{C}(B) := -C_{\star,B}^{-1} C_{\star,N} \in \mathbb{Q}^{B \times N}$
- $\bar{c}(B) := c_N + c_B^{\mathsf{T}} \bar{C}(B) = c_N - c_B^{\mathsf{T}} C_{\star,B}^{-1} C_{\star,N} \in \mathbb{Q}^N$
  (**reduzierte Kosten** zur Basis B)
- $\bar{d}(B) := C_{\star,B}^{-1} d = v_B \in \mathbb{Q}^B$
- Für $i \in I \cap [n] = N$: $y^{(i)}$ Lösung von $A_{I,\star} y = -\mathbb{e}_i$
  - Also $y^{(i)}_{N \setminus \{i\}} = \mathbb{O}_{N \setminus \{i\}}$, $y^{(i)}_i = 1$, $y^{(i)}_B = \bar{C}(B)_{\star,i}$
  - $\langle c, y^{(i)} \rangle = \bar{c}(B)_i$
  - Für $k \in \{n+1, \dots, m\}$; $\langle A_{k,\star}, y^{(i)} \rangle = 0$; also
  $$K^{>} \subseteq [n] \setminus I = B$$
  - Für alle $k \in B$:
    - $\langle A_{k,\star}, y^{(i)} \rangle = -y^{(i)}_k = -\bar{C}(B)_{k,i}$
    - $b_k - \langle A_{k,\star}, v \rangle = 0 + v_k = \bar{d}(B)_k$
    - Also:
    $$\lambda_k = \frac{\bar{d}(B)_k}{-\bar{C}(B)_{k,i}}$$

Simplex-Algorithmus mit Basen von Gleichungssystemen

- Gegeben: $C \in \mathbb{Q}^{p \times n}$ ($\operatorname{rang}(C) = p$), $d \in \mathbb{Q}^p$, $c \in \mathbb{Q}^n$
- (LP) $\max\{\langle c, x\rangle : Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$
- Sei $B \subseteq [n]$ ($|B| = p$) eine zulässige Basis, $N = [n] \setminus B$.

1. Falls $\bar{c}(B) \leq \mathbb{O}_N$: STOP (“$(\bar{d}_B, \mathbb{O}_N)$ Optimallösung”)
2. Sonst wähle ein $j_{\text{ein}} \in N$ mit $\bar{c}(B)_{j_{\text{ein}}} > 0$ ($j_{\text{ein}} = i_{\text{aus}}$)
3. Falls $\bar{C}(B)_{\star, j_{\text{ein}}} \geq \mathbb{O}_B$: STOP (“unbeschränkt”)
4. Sonst wähle $j_{\text{aus}} \in B$ mit $\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}}, j_{\text{ein}}} < 0$ und ($j_{\text{aus}} = k_{\text{ein}}$)

$$\frac{\bar{d}(B)_{j_{\text{aus}}}}{|\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}}, j_{\text{ein}}}|} = \min\left\{\frac{\bar{d}(B)_k}{|\bar{C}(B)_{k, j_{\text{ein}}}|} : k \in B, \bar{C}(B)_{k, j_{\text{ein}}} < 0\right\}$$

5. Setze $B \leftarrow B \setminus \{j_{\text{aus}}\} \cup \{j_{\text{ein}}\}$ (und $N \leftarrow [n] \setminus B$)

Zertifikate

- Das zu (P) $\max\{\langle c, x\rangle \;:\; Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$ duale Problem ist (D) $\min\{\langle d, u\rangle \;:\; C^{\mathsf{T}} u \geq c\}$
- Sei $B \subseteq [n]$ eine zulässige Basis für (P).
- Falls $\bar{c}(B) \leq \mathbb{O}_N$ ("Optimallösung"):
  - Definiere $u = \left(C_{\star,B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c_B$
  - $C^{\mathsf{T}} u = C^{\mathsf{T}}\left(C_{\star,B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c_B = \left({c_B}^{\mathsf{T}}(C_{\star,B}^{-1} C)\right)^{\mathsf{T}}$
    $$= \left({c_B}^{\mathsf{T}}(\mathbb{I}_B, C_{\star,B}^{-1} C_{\star,N})\right)^{\mathsf{T}} = (c_B, c_N - \bar{c}(B))$$
  - u zulässig für (D)
  - $\langle d, u\rangle = \langle d, \left(C_{\star,B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c_B\rangle = \langle C_{\star,B}^{-1} d, c_B\rangle = \langle c, (\bar{d}(B), \mathbb{O}_N)\rangle$
- Sonst, und falls $\bar{C}(B)_{\star, j_{\mathrm{ein}}} \geq \mathbb{O}_B$ ("unbeschränkt"):
  - Für $\lambda := \left(\bar{C}(B)_{\star, j_{\mathrm{ein}}}, \mathbb{e}_{j_{\mathrm{ein}}}\right) \in \mathbb{R}^B \times \mathbb{R}^N$ gilt $\lambda \geq \mathbb{O}_n$.
  - $\lambda^{\mathsf{T}} C^{\mathsf{T}} = (C\lambda)^{\mathsf{T}} = \left(C_{\star,B}\bar{C}(B)_{\star, j_{\mathrm{ein}}} + C_{\star, j_{\mathrm{ein}}}\right)^{\mathsf{T}}$
    $$= \left(-C_{\star, j_{\mathrm{ein}}} + C_{\star, j_{\mathrm{ein}}}\right)^{\mathsf{T}} = {\mathbb{O}_p}^{\mathsf{T}}$$
  - $\langle \lambda, c\rangle = \langle \bar{C}(B)_{\star, j_{\mathrm{ein}}}, c_B\rangle + c_{j_{\mathrm{ein}}} = \bar{c}_{j_{\mathrm{ein}}} > 0$
  - Also (Farkas-Lemma): (D) unzulässig

Bemerkungen für die Praxis

- Finden einer zulässigen Startbasis im Tableaux-Format (LP)
  $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$
- Können annehmen: $d \geq \mathbb{O}_p$ (Skalierung von $Cx = d$)
- Löse (AUX)
  $\max\{-\langle(\mathbb{O}_n, \mathbb{1}_p), (x, s)\rangle \,:\, Cx + s = d, x \geq \mathbb{O}_n, s \geq \mathbb{O}_p\}$
- Startbasis für (AUX): $B = \{n+1, \ldots, n+p\} \subset [n+p]$ mit zugehöriger Ecke $(\mathbb{O}_n, d) \geq \mathbb{O}_{n+p}$.
- Falls (AUX) negativen Optimalwert hat: (LP) unlösbar.
- Sonst sei $B^\star \subseteq [n+p]$ optimale Basis für (AUX).
- Mit $M := B^\star \cap \{n+1, \ldots, n+p\}$ ist $B^\star$ zulässige Startbasis für
  (LP') $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Cx = d, \tilde{s} = \mathbb{O}_M, x \geq \mathbb{O}_n, \tilde{s} \geq \mathbb{O}_M\}$
- Falls $B^\star \subseteq [n]$: $M = \varnothing$ und (LP') gleich (LP).

Benötigte Daten in einer Iteration

- Für die Durchführung einer Iteration braucht man:
  - Ein $j_{\text{ein}} \in N$ mit $\bar{c}(B)_{j_{\text{ein}}} = c_{j_{\text{ein}}} - c_B^{\mathsf{T}} C_{\star,B}^{-1} C_{\star,j_{\text{ein}}} > 0$
  - $\bar{d}(B) = C_{\star,B}^{-1} d \in \mathbb{Q}^B$
  - $\bar{C}(B)_{\star,j_{\text{ein}}} = -C_{\star,B}^{-1} C_{\star,j_{\text{ein}}} \in \mathbb{Q}^B$
- Generiere Daten aus $C_{\star,B}^{-1}$, wenn sie gebraucht werden.
- Für $j \in N$: Ist $u(B) \in \mathbb{Q}^p$ die Lösung von $(C_{\star,B})^{\mathsf{T}} z = c_B$, so ist $\bar{c}(B)_j = c_j - \langle u(B), C_{\star,j} \rangle$.
- $\bar{C}(B)_{\star,j}$ ist die Lösung von $C_{\star,B} \cdot z = -C_{\star,j}$.
- $\bar{d}(B)$ ist die Lösung von $C_{\star,B} \cdot z = d$.
- Hat man z.B. eine LU-Zerlegung von $C_{\star,B}$, so kann man die Lösungen von $C_{\star,B} \cdot z = q$ bzw. $(C_{\star,B})^{\mathsf{T}} z = q$ in $\mathrm{O}(p^2)$ Schritten bestimmen.
- Beim Basiswechsel $B \leftarrow B \setminus \{j_{\text{aus}}\} \cup \{j_{\text{ein}}\}$ kann man die LU-Zeregung in $\mathrm{O}(p^2)$ Schritten anpassen.
- $\rightsquigarrow$ **revidierter Simplexalgorithmus**

Hinzufügen von Variablen

- Seien $C' \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$ mit $C'_{\star,[n]} = C$ und $c' \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $c'_{[n]} = c$.
- Sei $B \subseteq [n]$ eine zulässige Basis von $Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n$.
- Wegen $C'_{\star,B} = C_{\star,B}$ ist B auch eine zulässige Basis für $C'x' = d, x' \geq \mathbb{O}_{n+1}$
- Sind $\bar{c}(B) \in \mathbb{Q}^{[n]\setminus B}$ und $\bar{c}'(B) \in \mathbb{Q}^{[n+1]\setminus B}$ die reduzierten Kosten von B bzgl. $\max\{\langle c, x\rangle : Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$ bzw. $\max\{\langle c', x\rangle : C'x = d, \tilde{x} \geq \mathbb{O}_{n+1}\}$, so ist $\bar{c}'(B)_{[n]} = \bar{c}(B)$.

Beobachtung 6.20

Hat man für ein lineares Optimierungsproblem (LP) im Gleichungsformat mit der Simplex-Methode eine optimale zulässige Basis $B^\star$ bestimmt, und fügt man dem Problem dann eine Variable hinzu, so kann man $B^\star$ als Startbasis für das neue Problem verwenden; alle ursprünglichen Variablen haben bzgl. $B^\star$ auch im neuen Problem nicht-positve reduzierte Kosten.

$\rightsquigarrow$ **Spaltengenerierung**

Eine Charakterisierung von $\bar{C}(B)$, $\bar{c}(B)$, $\bar{d}(B)$

Lemma 6.21

Sei $B \subseteq [n]$ eine Basis von $Cx = d$, $N = [n] \setminus B$, und
$\mathcal{A} = \{(x, \zeta) \in \mathbb{R}^{n+1} : Cx = d, \langle c, x\rangle = \zeta\}$.
Für $T \in \mathbb{R}^{B \times N}$, $t \in \mathbb{R}^B$, $g \in \mathbb{R}^N$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x_B = Tx_N + t \text{ und } \zeta = \langle g, x_N\rangle + \gamma$$
$$\text{für alle } (x, \zeta) \in \mathcal{A}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$T = \bar{C}(B), t = \bar{d}(B), g = \bar{c}(B), \text{ und } \gamma = \langle c_B, \bar{d}(B)\rangle$$

Der Simplex-Algorithmus mittels Pivotisierens

- Sei $B \subseteq [n]$ ($|B| = p$) eine zulässige Basis, $N = [n] \setminus B$.
- Seien $T \in \mathbb{Q}^{B \times N}$, $t \in \mathbb{Q}^B$, $g \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ so dass
$$(1)\ x_B = Tx_N + t \text{ und } (2)\ \zeta = \langle g, x_N \rangle + \gamma$$
für alle $(x, \zeta) \in \mathcal{A}$ (siehe Lemma 6.21) gilt (also $Cx = d$ aufgelöst nach x_B und dann x_B eliminiert aus $\zeta = \langle c, x \rangle$).

1. Falls $g \leq \mathbb{O}_N$: STOP (“$(t, \mathbb{O}_N)$ Optimallösung, Wert γ”)
2. Sonst wähle ein $j_{\text{ein}} \in N$ mit $g_{j_{\text{ein}}} > 0$
3. Falls $T_{\star, j_{\text{ein}}} \geq \mathbb{O}_B$: STOP (“unbeschränkt”)
4. Sonst wähle $j_{\text{aus}} \in B$ mit $T_{j_{\text{aus}}, j_{\text{ein}}} < 0$ und
$$\frac{t_{j_{\text{aus}}}}{|T_{j_{\text{aus}}, j_{\text{ein}}}|} = \min\left\{ \frac{t_k}{|T_{k, j_{\text{ein}}}|} \ : \ k \in B,\, T_{k, j_{\text{ein}}} < 0 \right\}$$
5. Löse die Gleichung $x_{j_{\text{aus}}} = \langle T_{j_{\text{aus}}, \star}, x_N \rangle + t_{j_{\text{aus}}}$ in (1) nach $x_{j_{\text{ein}}}$ auf und setze den für $x_{j_{\text{ein}}}$ erhaltenen Ausdruck in die übrigen Gleichungen in (1) und in (2) ein.
6. Setze $B \leftarrow B \setminus \{j_{\text{aus}}\} \cup \{j_{\text{ein}}\}$, $N \leftarrow [n] \setminus B$
7. Gehe zu Schritt 1.

Dual zulässige Basen

(P) $\max\{\langle c, x\rangle : Cx = d, x \geq \mathbb{O}\}$ (D) $\min\{\langle d, u\rangle : -C^{\mathsf{T}}u \leq -c\}$

- $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ ($\operatorname{rang}(C) = p$), $d \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^n$,
- $\mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}}, -c)$ ist spitz
- $u \in \mathbb{R}^p$ ist genau dann eine Ecke von $\mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}}, -c)$,
  - wenn es $I \subset [n]$ gibt mit $|I| = p$, und
    $\operatorname{rang}(-C^{\mathsf{T}}{}_{I,\star}) = p$, $-(C^{\mathsf{T}})_{I,\star}u = -c_I$ und $-C^{\mathsf{T}}{}_{[n]\setminus I,\star}u \leq -c_{[n]\setminus I}$
  - d.h., wenn es eine Basis $B \subseteq [n]$ von C gibt mit ($N = [n] \setminus B$):
    - $u = (C^{-1}_{\star,B})^{\mathsf{T}} c_B$
    - $-(C^{\mathsf{T}})_{N,\star}u \leq -c_N$, d.h. $\bar{c}(B) \leq \mathbb{O}_N$

Definition 6.22

Eine Basis $B \subseteq [n]$ von C (nicht notwendigerweise primal zulässig) heißt **dual zulässig**, wenn $\bar{c}(B) \leq \mathbb{O}_N$ ist.

Beobachtung 6.23

Die dual zulässigen Basen von C sind genau die U-Basen der Ecken von $\mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}}, -c)$.

Duales Optimalitätskriterium

- $\min\{\langle d,u\rangle \;:\; u \in \mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}},-c)\}$
  $$= -\max\{\langle -d,u\rangle \;:\; \mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}},-c)\}$$
- Sei $B \subseteq [n]$ dual zulässige Basis zur Ecke $v = (C_{\star,B}^{-1})^{\mathsf{T}} c_B$.
- Für $i \in B$: $y^{(i)} = (C_{\star,B}^{-1})^{\mathsf{T}} \mathbb{e}_i$ (Extremalstrahlen des von B definierten simplizialen Relaxierungskegels in v)
- Optimalitätskriterium: $\langle -d, y^{(i)}\rangle \leq 0$ (für alle $i \in B$)
- $\langle -d, y^{(i)}\rangle = -d^{\mathsf{T}}(C_{\star,B}^{-1})^{\mathsf{T}} \mathbb{e}_i = -(C_{\star,B}^{-1} d)^{\mathsf{T}} \mathbb{e}_i = -\bar{d}(B)_i$

Beobachtung 6.24

Ist $B \subseteq [n]$ eine dual zulässige Basis mit $\bar{d}(B) \geq \mathbb{O}_B$ (d.h., B ist auch primal zulässig), so sind $(C_{\star,B}^{-1})^{\mathsf{T}} c_B$ eine duale und $(\bar{d}(B), \mathbb{O}_N)$ eine primale Optimallösung.

- Für $k \in N$, $i \in B$: $\langle -(C^{\mathsf{T}})_{k,\star}, y^{(i)}\rangle = \bar{C}(B)_{i,k}$
- Für $k \in N$: $-c_k - \langle -(C^{\mathsf{T}})_{k,\star}, v\rangle = -\bar{c}(B)_k$

Der duale Simplex-Algorithmus

- Umformulierung des "Simplex-Algorithmus (algebraisch, vereinfacht)" für $\max\{\langle -d, u\rangle : \mathrm{P}^{\leq}(-C^{\mathsf{T}}, -c)\}$.
- Sei $B \subseteq [n]$ eine dual zulässige Basis.

1. Falls $\bar{d}(B) \geq \mathbb{O}_B$: STOP ("Optimallösungen gefunden")
2. Sonst wähle $j_{\text{aus}} \in \{j \in B : \bar{d}(B)_j < 0\}$.
3. Falls $\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}},\star} \leq \mathbb{O}_N$: STOP ("(D) unbeschr., (P) unzul.")
4. Sonst wähle $j_{\text{ein}} \in N$ mit $\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}},j_{\text{ein}}} > 0$ und

$$\frac{|\bar{c}(B)_{j_{\text{ein}}}|}{\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}},j_{\text{ein}}}} = \min\{\frac{|\bar{c}(B)_k|}{\bar{C}(B)_{j_{\text{aus}},k}} : k \in N, \bar{C}(B)_{j_{\text{aus}},k} > 0\}$$

5. Ersetze $B \leftarrow B \setminus \{j_{\text{aus}}\} \cup \{j_{\text{ein}}\}$ und gehe zu 1.

Der duale Simplex-Algorithmus mittels Pivotisierens

- Sei $B \subseteq [n]$ eine dual zulässige Basis, $N = [n] \setminus B$.
- Seien $T \in \mathbb{Q}^{B \times N}$, $t \in \mathbb{Q}^B$, $g \in \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ so dass

  $$(1)\ x_B = Tx_N + t \text{ und } (2)\ \zeta = \langle g, x_N \rangle + \gamma$$

  für alle $(x, \zeta) \in \mathcal{A}$ (siehe Lemma 6.21) gilt (also $Cx = d$ aufgelöst nach x_B und dann x_B eliminiert aus $\zeta = \langle c, x \rangle$).

1. Falls $t \geq \mathbb{O}_B$: STOP ("$(t, \mathbb{O}_N)$ und $\left(C_{\star,B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c_B$ sind Optimallösungen für (P) bzw. (D) vom Wert γ")
2. Sonst wähle ein $j_{\text{aus}} \in B$ mit $t_{j_{\text{aus}}} < 0$
3. Falls $T_{j_{\text{aus}},\star} \leq \mathbb{O}_N$: STOP ("(D) unbeschr., (P) unzulässig")
4. Sonst wähle $j_{\text{ein}} \in N$ mit $T_{j_{\text{aus}},j_{\text{ein}}} > 0$ und
   $$\frac{|g_{j_{\text{ein}}}|}{T_{j_{\text{aus}},j_{\text{ein}}}} = \min\left\{ \frac{|g_k|}{T_{j_{\text{aus}},k}} \ :\ k \in N,\ T_{j_{\text{aus}},k} > 0 \right\}$$
5. Löse die Gleichung $x_{j_{\text{aus}}} = \langle T_{j_{\text{aus}},\star}, x_N \rangle + t_{j_{\text{aus}}}$ in (1) nach $x_{j_{\text{ein}}}$ auf und setze den für $x_{j_{\text{ein}}}$ erhaltenen Ausdruck in die übrigen Gleichungen in (1) und in (2) ein.
6. Setze $B \leftarrow B \setminus \{j_{\text{aus}}\} \cup \{j_{\text{ein}}\}$, $N \leftarrow [n] \setminus B$
7. Gehe zu Schritt 1.

Hinzufügen von Ungleichungen

- Sei $B \subseteq [n]$ eine duale zulässige Basis für
$$\text{(LP)} \max\{\langle c, x\rangle \,:\, Cx = d, x \geq \mathbb{O}_n\}$$
mit zugehöriger Duallösung $u = \left(C_{\star,B}^{-1}\right)^{\mathsf{T}} c_B$.
- Angenommen, man möchte das mit der Ungleichung $\langle a, x\rangle \leq \beta$ weiter eingeschränkte Problem lösen.
- $\rightsquigarrow$ (LP') $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, C'x' = d, x' \geq \mathbb{O}_{n+1}\}$ (der Größe $(p+1) \times (n+1)$ mit ${C'}_{[p],\star} = (C, \mathbb{O}_p)$, ${C'}_{p+1,\star} = (a, 1)$, $d'_{[p]} = d$, $d'_{p+1} = \beta$, $c' = (c, 0)$)
- $B \cup \{p+1\}$ ist dual zulässig für (LP') mit zugehöriger Duallösung $(u, 0)$.

Beobachtung 6.25

Hat man ein Optimallösung eines linearen Optimierungsproblems (LP) mit der Simplex-Methode berechnet, so kann man die zugehörige Basis als duale Startbasis für ein Problem verwenden, das entsteht, wenn man zu (LP) eine Ungleichung hinzufügt.

Dualer Start für einen Spezialfall

- Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $\tilde{c} \in \mathbb{Q}^n$ und $\tilde{c} \geq \mathbb{O}_n$:

$$\min\{\langle \tilde{c}, x \rangle \; : \; Ax \leq b, x \geq \mathbb{O}_n\}$$

- Äquivalent (bis auf Multiplikation mit -1):

$$\max\{\langle c, x \rangle \; : \; Ax \leq b, x \geq \mathbb{O}_n\}$$

  mit $c = -\tilde{c} \leq \mathbb{O}_n$
- Gleichungsformat:

$$\max\{\langle (c, \mathbb{O}_m), (x, s) \rangle \; : \; Ax + s = b, x \geq \mathbb{O}_n, s \geq \mathbb{O}_m\}$$

- Dual zulässige Basis:

$$B = \{n+1, \ldots, n+m\} \subseteq [n+m]$$

  mit zugehöriger Duallösung $\mathbb{O}_{n+m}$ (gültig wegen $\mathbb{O}_n \leq -c$).

Dualer Simplex-Algorithmus graphisch