Vorlesung
Einführung in die Mathematische Optimierung
(Wintersemester 2013/14)

Kapitel 8: Diskrete Optimierung

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

28. Januar 2014

Gliederung

Modellierungsbeispiele

Einordnung

Ganzzahlige Hüllen von Polyedern

Ganzzahlige Polyeder

Total unimodulare Matrizen

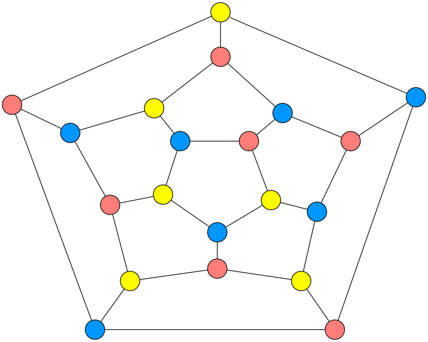
Inzidenzmatrizen ungerichteter Graphen

Inzidenzmatrizen gerichteter Graphen

Graphenfärbung

Definition 8.1

Eine k-**Knotenfärbung** eine Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \to [k]$ mit $f(v) \neq f(w)$ für alle Kanten $\{v, w\} \in E$. Die **chromatische Zahl** $\chi(G)$ von G ist die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, für die es eine k-Knotenfärbung von G gibt.



Das Graphenfärbungsproblem

Problem 8.2 (Graphenfärbungsproblem)

Instanz: Graph $G = (V, E)$

Aufgabe: k-Knotenfärbung von G mit möglichst kleinem k

- Ansatz: Modelliere $f : V \to [n]$ ($n = |V|$) mit 0/1-wertigen Variablen $x_{v,i}$ für alle $v \in V$ und $i \in [n]$ mit der Bedeutung

$$x_{v,i} = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(v) = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

- Bedingung: Für alle $i \in [n]$ und $\{v, w\} \in E$: $x_{v,i} + x_{w,i} \leq 1$
- Zusätzlich: 0/1-wertige Variablen y_i ($i \in [n]$) mit

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } f^{-1}(\{i\}) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

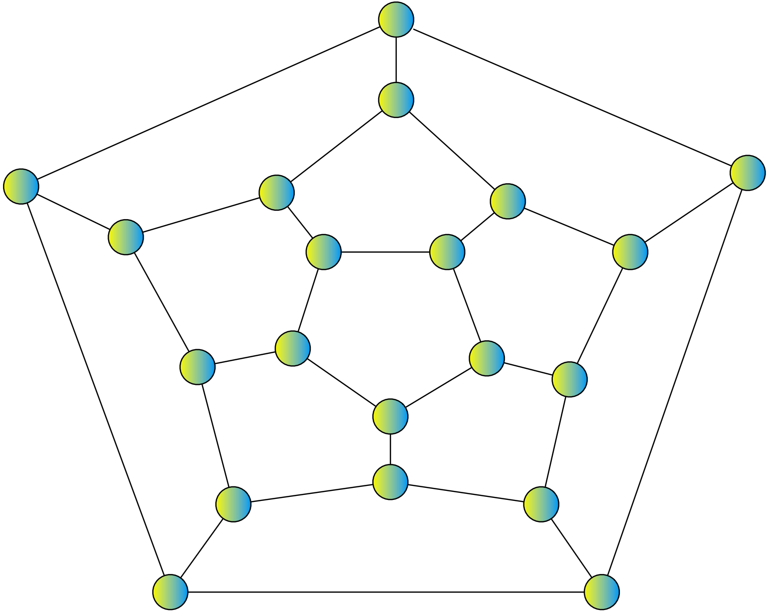
Ein Modell

- Ganzzahliges Lineares Optimierungsproblem:

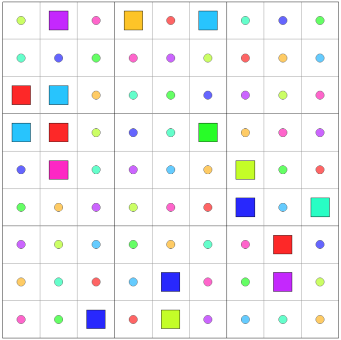
$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(COL)} & \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i & & & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{v,i} & = & 1 & \text{für alle } v \in V \\
& & x_{v,i} + x_{w,i} & \leq & 1 & \text{für alle } \{v,w\} \in E, i \in [n] \\
& & x_{v,i} & \leq & y_i & \text{für alle } v \in V, i \in [n] \\
& & x_{v,i}, y_i & \geq & 0 & \text{für alle } v \in V, i \in [n] \\
& & x_{v,i}, y_i & \in & \mathbb{Z} & \text{für alle } v \in V, i \in [n]
\end{array}
$$

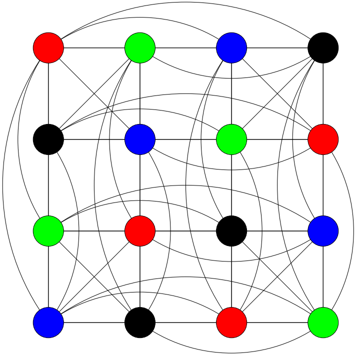
- Ganzzahligkeitsbedingung ist wesentlich: $x_{v,i} = y_i = \frac{1}{2}$ für $i \in \{1,2\}$, $x_{v,i} = y_i = 0$ für $i \in [n] \setminus \{1,2\}$ (für alle $v \in V$) ist sonst zulässig mit Wert 1

Fraktionale Färbung



Sudoku

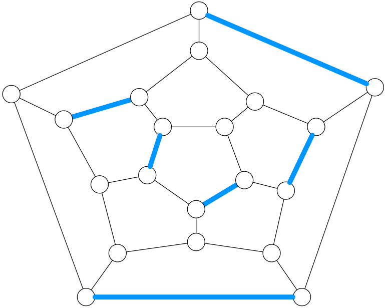


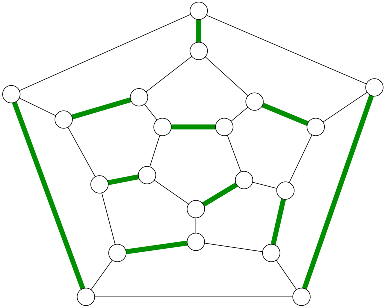


Matching

Definition 8.3

Ein **Matching** in einem Graph $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ der Kanten mit $e \cap e' = \varnothing$ für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$; ein Matching mit $\frac{1}{2}|V|$ Kanten ist ein **perfektes Matching**.





Das Matching-Problem

Problem 8.4 (Matchingproblem)

Instanz: Graph $G = (V, E)$, Kantengewichte $c \in \mathbb{Q}^E$

Aufgabe: Matching $M \subseteq E$ in G mit möglichst großem Gewicht $c(M) = \sum_{e \in M} c_e$

(Falls $c = \mathbb{1}_E$: *ungewichtetes Matching-Problem*)

- Modelliere $M \subseteq E$ mit 0/1-wertigen Variablen x_e mit $x_e = 1$ genau dann, wenn $e \in M$ (**charakteristischer Vektor**).
- Ganzzahliges Lineares Optimierungsproblem:

$$
\begin{array}{llcll}
\max & \sum\limits_{e \in E} c_e x_e & & & \\
& \sum\limits_{w \in V \text{ mit } \{v,w\} \in E} x_{\{v,w\}} & \leq & 1 & \text{für alle } v \in V \\
& x_e & \geq & 0 & \text{für alle } e \in E \\
& x_e & \in & \mathbb{Z} & \text{für alle } e \in E
\end{array}
$$

Das Knapsack-Problem

Problem 8.5 (Knapsack-Problem)

Instanz: n Typen von Gegenständen mit Gewichten $g_i > 0$ und Werten $w_i > 0$ ($i \in [n]$), Gewichtsschranke $G \in \mathbb{Q}_+$

Aufgabe: Vielfachheiten $x_i \in \mathbb{N}$ ($i \in \mathbb{N}$), so dass $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ unter der Nebenbedingung $\sum_{i=1}^{n} x_i g_i \leq G$ möglichst groß ist

- Mathematisches Optimierungsproblem:

$$\max\{\langle w, x\rangle \;:\; \langle g, x\rangle \leq G, x \in \mathbb{Z}^n\}$$

- Ohne Ganzzahligkeitsbedingung:

$$\max\{\langle w, x\rangle \;:\; \langle g, x\rangle \leq G, x \in \mathbb{R}^n\} = \max\{\tfrac{w_i G}{g_i} \;:\; i \in [n]\}$$

(“So viel wie möglich von Gegenstand mit maximalem $\frac{w_i}{g_i}$”)

Problemdefinition

Problem 8.6 (Ganzzahlige Lineare Optimierung (ILP))

Instanz: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$ und $c \in \mathbb{Q}^n$

Aufgabe: $\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$

- Integer Linear Program (ILP)
- Spezialfall **0/1-ILP**: $x \in \{0,1\}^n$ statt $x \in \mathbb{Z}^n$
- Zulässigkeitsbereich nicht konvex, sogar unzusammenhängend
- Auch: min statt max, Gleichungen, $\geq$-Ungleichungen
- Jedes ILP mit rationalen A, b, c, das nicht unzulässig oder unbeschränkt ist, nimmt sein Optimum an (später).

Problem 8.7 (ILP-Zulässigkeit)

Instanz: $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$

Frage: Gibt es $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $Ax \leq b$?

SAT als ILP-Zulässigkeits-Problem

Problem 8.8 (Erfüllbarkeitsproblem (SAT))

Instanz: Disjunktive Klauseln $C_1, \ldots, C_m$ in Booleschen Variablen $v_1, \ldots, v_n$

Frage: Gibt es eine Belegung von $v_1, \ldots, v_n$, die $C_1, \ldots, C_m$ simultan erfüllt?

- Modellierung als 0/1-Zulässigkeitsproblem, wobei $J^+(i), J^-(i) \subseteq [n]$ die Mengen der Indizes der nicht-negierten bzw. der negierten Variablen in C_i sind:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J^+(i)} x_j + \sum_{j \in J^-(i)} (1 - x_j) &\geq 1 && \text{für alle } i \in [m] \\ x &\in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

Beobachtung 8.9

ILP-Zulässigkeit und ILP sind NP-schwere Probleme.

Gleichungssysteme

- Mittels Skalierung (Hauptnenner) A, b ganzzahlig
- Jedes ILP-Zulässigkeitsproblem kann in ein Gleichungsformat gebracht werden (ganzzahlige Schlupfvariablen):
$$\{x \in \mathbb{Z}^n \,:\, Ax = b, x \geq \mathbb{O}_n\} \neq \varnothing?$$
$\rightsquigarrow$ NP-schwer
- Aber: Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{Q}^m$ sind folgende Entscheidungsprobleme polynomial lösbar:
  - Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme (LGS):
  $$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b\} \neq \varnothing?$$
  - Nichtnegative Lösbarkeit von LGS:
  $$\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b, x \geq \mathbb{O}_n\} \neq \varnothing?$$
  - Ganzzahlige Lösbarkeit von LGS:
  $$\{x \in \mathbb{Z}^n \,:\, Ax = b\} \neq \varnothing?$$
  (*Lineare diphantische Gleichungssysteme* $\rightsquigarrow$ *VL SoSem 15*)

Dualität ?

- Für $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$, $c \in \mathbb{Q}^n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
& \max\{\langle c, x\rangle \;:\; Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} && (1)\\
\leq \; & \max\{\langle c, x\rangle \;:\; Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} && (2)\\
= \; & \min\{\langle b, y\rangle \;:\; A^{\mathsf{T}} y = c, y \geq \mathbb{O}_m, y \in \mathbb{R}^m\} && (3)\\
\leq \; & \min\{\langle b, y\rangle \;:\; A^{\mathsf{T}} y = c, y \geq \mathbb{O}_m, y \in \mathbb{Z}^m\} && (4)
\end{aligned}
$$

- Aber z.B. für $A = (2)$, $b = (1)$, $c = (1)$ sind die Werte:
  (1): 0 (2): $\frac{1}{2}$ (3): $\frac{1}{2}$ (4): ∞
- LP-Dualität liefert also keine starke ILP-Dualität.
- Nicht überrraschend: Sonst wäre $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$.
  - Z.B.: “Ist die Färbungzahl $\chi(G)$ von G höchstens k?” ist ein NP-vollständiges Entscheidungsproblem.
  - Starke Dualität ($\min\{\dots\} = \max\{\dots\}$) würde ein polynomiales Zertifikat für die Nein-Antwort garantieren.

Definition

Definition 8.10

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{conv} X \;:=\; \Big\{ \sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)} \;:\; r \in \mathbb{N}, x^{(i)} \in X \ (i \in [r]), \lambda_i \geq 0 \ (i \in [r]), \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1 \Big\}$$

die **konvexe Hülle** von X.

Definition 8.11

Für ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$P_\mathrm{I} = \operatorname{conv}(P \cap \mathbb{Z}^n)$$

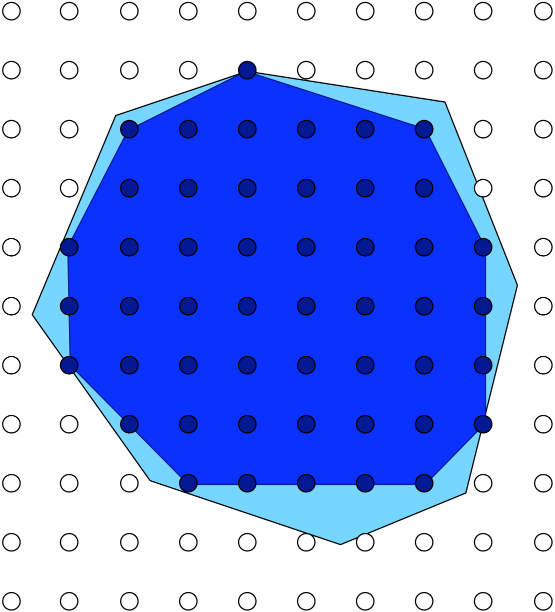
die **ganzzahlige Hülle** von P.

Bemerkung 8.12

Für $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sup\{\langle c, x\rangle \;:\; x \in P \cap \mathbb{Z}^n\} = \sup\{\langle c, x\rangle \;:\; x \in P_\mathrm{I}\}$$

Beispiel



Ganzzahlige Hüllen rationaler Polyeder

Satz 8.13

Für ein rationales Polyeder $P = \mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ *(mit* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$*) gelten folgende Aussagen:*

1. P_{I} *ist ein rationales Polyeder.*
2. *Falls* $P_{\mathrm{I}} \neq \varnothing$*:* $\mathrm{char}(P_{\mathrm{I}}) = \mathrm{char}(P)$
3. *Ist* $\varphi(A, b)$ *die maximale Kodierungslänge eines Eintrags in* A *oder* b*, so gibt es* $X, Y \subseteq \mathbb{Z}^n$ *mit* $|X|, |Y| < \infty$ *und*
$$P_I \;=\; \mathrm{conv}\, X + \mathrm{ccone}\, Y \;,$$
so dass jede Komponente eines Vektors in $X \cup Y$ *höchstens Kodierungslänge* $2n^2\varphi(A, b) + n$ *hat.*

Bemerkung 8.14

Für nicht-rationale Polyeder P *ist* P_{I} *i.a. kein Polyeder.*

Beweise: Vorlesung SoSem 15

Konsequenzen für ILPs

Korollar 8.15

Ist $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) \cap \mathbb{Z}^n \neq \varnothing$ *(für* $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$*,* $b \in \mathbb{Q}^m$*), so gib es ein* $x \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b) \cap \mathbb{Z}^n$ *mit in* $\langle A, b\rangle$ *polynomial beschränkter Kodierungslänge.*
Insbesondere: Das ILP-Zulässigkeitsproblem ist in NP*, also* NP*-vollständig.*

- Erinnerung: Für endliches $X \subseteq \mathbb{R}^n$ wird $\max\{\langle c, x\rangle \ : \ x \in \operatorname{conv} X\}$ in einem $x^\star \in X$ angenommen.

Korollar 8.16

Ist das Problem $\max\{\langle c, x\rangle \ : \ Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$ *(*$A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$*,* $b \in \mathbb{Q}^m$*) weder unzulässig noch unbeschränkt, so nimmt es sein Optimum in einem Punkt* $x \in \mathbb{Z}^n$ *mit polynomial in* $\langle A, b\rangle$ *beschränkter Kodierungslänge an.*

Eine Lösungsstrategie für ILPs

- Problem: $\max\{\langle c, x\rangle \,:\, Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\}$
  (mit $A \in \mathbb{Q}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$)
- Berechne $\gamma = \max\{\langle c, x\rangle \,:\, x \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b)_{\mathrm{I}}\}$ (LP)
- Finde ein $x \in F \cap \mathbb{Z}^n$, wobei $F = \{x \in P_{\mathrm{I}} \,:\, \langle c, x\rangle = \gamma\}$ die optimale Seite von P_{I} ist ($F \cap \mathbb{Z}^n \neq \varnothing$ wegen Kor. 8.16).
- Falls $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ nicht spitz: Lösen eines linearen diophantischen Gleichungssystems ($\rightsquigarrow$ VL SoSem 12/13)
- $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)_{\mathrm{I}}$ rationales Polyeder (Satz 8.13), also gibt es $C \in \mathbb{Q}^{p\times n}$, $d \in \mathbb{Q}^p$ mit
  $$\mathrm{P}^{\leq}(A, b)_{\mathrm{I}} = \mathrm{P}^{\leq}(C, d).$$
- Also: (LP) ist ein lineares Optimierungsproblem.
- Bemerkungen zu C und d:
  - I.a “viel komplizierter als A und b”.
  - In wichtigen Spezialfällen bekannt (z.B. Matching-Problem).
  - Auch partielle Ungleichungsbeschreibung kann nützlich sein.

Beispiel: Graphenfärbung

$$
\begin{array}{llrcll}
\text{(COL)} & \min & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i & & & \\
& & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{v,i} & = & 1 & \text{für alle } v \in V \\
& & x_{v,i} + x_{w,i} & \leq & 1 & \text{für alle } \{v,w\} \in E, i \in [n] \\
& & x_{v,i} & \leq & y_i & \text{für alle } v \in V, i \in [n] \\
& & x_{v,i}, y_i & \geq & 0 & \text{für alle } v \in V, i \in [n] \\
& & x_{v,i}, y_i & \in & \mathbb{Z} & \text{für alle } v \in V, i \in [n]
\end{array}
$$

- Das Entscheidungsproblem “Gegeben G und k, ist $\chi(G) \leq k$?” ist NP-vollständig.

Beispiel: Graphenfärbung

- Für jeden Graph $G = (V, E)$ seien $A(G) \in \mathbb{Q}^{m(G)\times n(G)}$ und $b(G) \in \mathbb{Q}^{m(G)}$ so, dass $A(G)z \leq b(G)$ das System der Ungleichungen und Gleichungen aus (COL) ist ($z = (x, y)$).
- Angenommen, $C(G) \in \mathbb{Q}^{p(G)\times n(G)}$ und $d(G) \in \mathbb{Q}^{p(G)}$ sind so, dass für alle G gilt:
  - $\mathrm{P}^{\leq}(A(G), b(G))_{\mathrm{I}} = \mathrm{P}^{\leq}(C(G), d(G))$ (1)
  - Für jedes $i \in p(G)$ kann man in in $|V|$ polynomialer Zeit beweisen, dass $\langle C(G)_{i,\star}, z\rangle \leq d(G)_i$ gültig für $\mathrm{P}^{\leq}(A(G), b(G)) \cap \mathbb{Z}^n$ ist. (2)
    (Z.B. Beweis der Gültigkeit von "$x_{v,i} + x_{w,i} \leq 1$" für $e = \{v, w\} \in E$ durch Überprüfen von "$e \in E$".)
  - Insbesondere hat $(C(G), d(G))_{i,\star}$ polynomial in $|V|$ beschränkte Kodierungslänge (für alle $i \in p(G)$).

Beispiel: Graphenfärbung

- Sei $c(G) \in \mathbb{Q}^{n(G)}$ der Zielfunktionsvektor von (COL).
- Sei $z^\star$ optimale Eckenlösung von $\min\{\langle c(G), z\rangle \ : \ z \in \mathrm{P}^{\leq}(C(G), d(G))\}$
- Also $\langle c(G), z^\star\rangle = \chi(G)$ und (nach Kor. 7.6) ist
$$c(G) \ \in \ \operatorname{ccone}\{C(G)_{i,\star} \ : \ i \in \operatorname{Eq}(z^\star)\}.$$
- Satz von Carathéodory: Es gibt $I \subseteq \operatorname{Eq}(z^\star)$ mit $|I| \leq n(G)$ und $\lambda_i \in \mathbb{Q}_+$ ($i \in I$) mit
$$c(G) \ = \ \sum_{i \in I} \lambda_i C(G)_{I,\star}.$$
- Wir können λ_i ($i \in I$) so wählen, dass sie polynomial in $|V| + \langle c\rangle$ beschränkte Kodierunglängen haben (LP-Lösung).
- Also liefern λ_i ($i \in I$) (wieder mit Kor. 7.6) ein polynomial großes Zertifikat für die Optimalität von $z^\star$, also für $k > \chi(G)$ (falls das der Fall ist).
- Systeme $C(G)z \leq d(G)$ mit (1) und (2) existieren also nur dann für alle Graphen G, wenn $\mathrm{NP} = \mathrm{coNP}$ ist.

Definition und Charakterisierung

Definition 8.17

Ein Polyeder $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **ganzzahlig**, wenn $P_\mathrm{I} = P$ gilt.

Bemerkung 8.18

Rationale polyedrische Kegel sind ganzzahlig.

Satz 8.19

Ein rationales Polyeder ist genau dann ganzzahlig, wenn jede seiner minimalen Seitenflächen einen ganzzahligen Punkt enthält.

Beweise: Vorlesung SoSem 15

Ganzzahlige Optimierung über Ganzzahligen Polyedern

- Sei $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ (mit $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Q}^m$) ganzzahlig.
- Für alle $c \in \mathbb{Q}^n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
(ILP) \quad & \max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \\
& \qquad = \max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\} \quad (LP)
\end{aligned}
$$

- Ist $\mathrm{P}^{\leq}(A, B)$ spitz, kann man (ILP) lösen, indem man eine optimale Eckenlösung von (LP) bestimmt (polynomial).
- Sonst: Bestimmen eines LGS für eine optimale minimale Seite, Lösen des diophantischen Gleichungssystems (polynomial, VL SoSem 15)
- Wir haben für *ganzzahlige* $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ folgende starke Dualität:

$$
\begin{aligned}
& \max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \\
& \qquad = \min\{\langle b, y\rangle : A^{\mathsf{T}} y = c, y \geq \mathbb{O}_m, y \in \mathbb{R}^m\} \quad (D)
\end{aligned}
$$

- In (D) kann man i.a. nicht $y \in \mathbb{Z}^m$ fordern (z.B. bei $A = (2)$, $b = (2)$, $c = (1)$).

Totale Unimodularität und Ganzzahlige Polyeder

Definition 8.20

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist **total unimodular** (**TU**), wenn

$$\det(A_{I,J}) \in \{-1, 0, 1\}$$

für alle $I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$ ($|I| = |J|$) ist ($\rightsquigarrow A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$).

Satz 8.21

Für alle $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$ gilt:

1. *Ist A total unimodular, so ist $\mathrm{P}^{\leq}(A, b)$ für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig.*
2. *Ist $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) \cap \mathbb{R}^n_+$ für jedes $b \in \mathbb{Z}^m$ ganzzahlig, so ist A total unimodular.*

- Beweis: VorlesungSoSem 15
- Die Ganzzahligkeit von b ist wichtig:

$$\mathrm{P}^{\leq}(A, \sigma b) = \sigma\, \mathrm{P}^{\leq}(A, b) \text{ für alle } \sigma > 0$$

TU-erhaltende Operationen

Bemerkung 8.22

Ist $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ TU, so sind auch die folgenden Matrizen TU:

1. $-A$, $(A, -A)$, $(A, \mathbb{I}_m)$, $(A, -\mathbb{I}_m)$, A^T
2. $A_{I,J}$ *(*$I \subseteq [m]$, $J \subseteq [n]$*)*
3. *Matrizen, die aus* A *durch Zeilen- oder Spalten-Permutationen oder durch Multiplikation einiger Spalten/Zeilen mit* -1 *entstehen*

- **Aber:** Für TU-Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A' \in \mathbb{R}^{m\times n'}$ ist i.a. (A, A') nicht TU.
- Sonst wären alle Matrizen in $\{-1, 0, 1\}^{m\times n}$ TU.
- Gegenbeispiel: $\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Konsequenzen

Korollar 8.23

Für eine total unimodulare Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *sowie ganzzahlige Vektoren* $l, u \in \mathbb{Z}^n$ *und* $b \in \mathbb{Z}^m$ *sind die folgenden Polyeder ganzzahlig:*

- $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq \mathbb{O}_n\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq \mathbb{O}_n\} \;=:\; \mathrm{P}_+^=(A, b)$
- $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, l \leq x \leq u\}$
- $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, l \leq x \leq u\}$

Satz 8.24

Ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *TU, und sind* $b \in \mathbb{Z}^m$ *und* $c \in \mathbb{Z}^n$*, so gilt*

$$\begin{aligned} &\max\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n\} \\ &\qquad = \min\{\langle b, y\rangle : A^{\mathsf{T}} y = c, y \geq \mathbb{O}_m, y \in \mathbb{Z}^m\}\;, \end{aligned}$$

sofern $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) \neq \varnothing$ *und* $\mathrm{P}_+^=(A^{\mathsf{T}}, c) \neq \varnothing$ *sind.*

Kriterium von Ghouila–Houri

Satz 8.25

Eine Matrix $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ ist genau dann total unimodular, wenn man jede Teilmenge $J \subseteq [n]$ der Spaltenindizes so in $J = J^+ \cup J^-$ ($J^+ \cap J^- = \emptyset$) partitionieren kann, dass

$$\sum_{j \in J^+} A_{\star,j} - \sum_{j \in J^-} A_{\star,j} \ \in \ \{-1, 0, 1\}^m$$

ist. Wegen Bem. 8.22 gilt die analoge Charakterisierung auch für Zeilenteilmengen.

Korollar 8.26

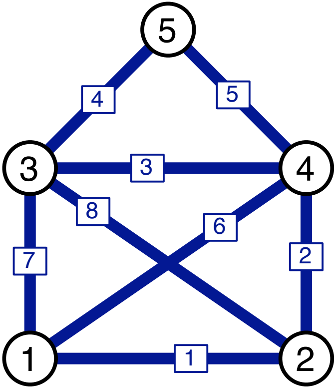
Hat $A \in \{-1, 0, 1\}^{m \times n}$ in jeder Spalte (oder in jeder Zeile) höchstens einen $(+1)$-Eintrag und höchstens einen (-1)-Eintrag, so ist A total unimodular.

Beweise: Vorlesung SoSem 15

Definition

Definition 8.27

Die *Inzidenzmatrix* eines Graphen $G = (V, E)$ ist die Matrix $\mathrm{Inz}(G) \in \{0,1\}^{V \times E}$, für die $\mathrm{Inz}(G)_{v,e} = 1$ genau dann gilt, wenn $v \in e$ ist.

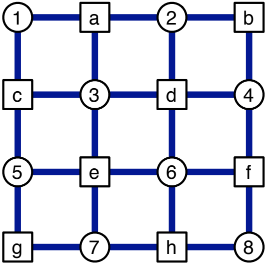


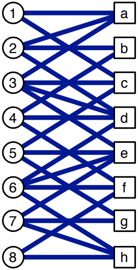
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bipartite Graphen

Definition 8.28

Ein Graph $G = (V, E)$ ist **bipartit**, wenn es eine Zerlegung $V = X \cup Y$ $(X \cap Y = \emptyset)$ gibt mit $e \not\subseteq X$ und $e \not\subseteq Y$ für alle $e \in E$.





Satz 8.29

Die Inzidenzmatrix eines Graphen G *ist genau dann total unimodular, wenn* G *bipartit ist.*

Matching-Polytope

Definition 8.30

Für einen Graphen $G = (V, E)$ heißen

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G) &:= \mathrm{conv}\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ Matching}\} \subseteq [0,1]^E \\ \mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G) &:= \mathrm{conv}\{\chi(M) : M \subseteq E \text{ perf. Matching}\} \subseteq [0,1]^E \end{aligned}$$

($\chi(M) \in \{0,1\}^E$ mit $\chi(M)_e = 1 \Leftrightarrow e \in M$ für alle $e \in E$ ist der **charakteristische Vektor** von M) das **Matching-Polytop** bzw. das **Perfect-Matching Polytop** von G.

Definition 8.31

Ein Polytop $\mathrm{conv}\, X$ mit $X \subseteq \{0,1\}^n$ ist ein **0/1-Polytop**.

Beobachtung 8.32

Die Eckenmenge eines 0/1-Polytops $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$P \cap \mathbb{Z}^n = P \cap \{0,1\}^n.$$

Matching-Polytope und Optimierung

- Für $w \in \mathbb{Q}^E$: Eine optimale Eckenlösung von
$$\max\{\langle w, x\rangle \,:\, x \in \mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G)\}$$
ist der charakteristische Vektor eines w-maximalen Matchings (analog für $\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G)$).

Beobachtung 8.33

Für alle Graphen G gelten:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \,:\, \mathrm{Inz}(G)x \leq \mathbb{1}_V\}_{\mathrm{I}}$$
$$\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \,:\, \mathrm{Inz}(G)x = \mathbb{1}_V\}_{\mathrm{I}}$$

Satz 8.34

Für bipartite Graphen G gelten:

$$\mathrm{P}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \,:\, \mathrm{Inz}(G)x \leq \mathbb{1}_V\}$$
$$\mathrm{P}^{\mathrm{perf}}_{\mathrm{match}}(G) = \{x \in [0,1]^E \,:\, \mathrm{Inz}(G)x = \mathbb{1}_V\}$$

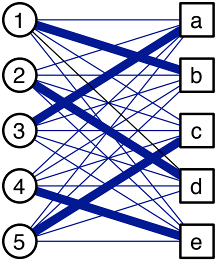
Der vollständige bipartite Graph

Definition 8.35

Ein **vollständiger bipartiter Graph** $K_{n,n}$ hat eine Knotenmenge $V_{n,n} = X \cup Y$ ($X \cap Y = \varnothing$) mit $|X| = |Y| = n$ und die Kantenmenge $E_{n,n} = \{\{x, y\} : x \in X, y \in Y\}$.

Beobachtung 8.36

Die perfekten Matchings in $K_{n,n}$ stehen in Bijektion zu den $n \times n$-Permutationsmatrizen.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das Birkhoff-Polytop

Definition 8.37

Das **Birkhoff-Polytop** ist $\mathrm{P}_{\mathrm{birk}}(n) := \mathrm{P}_{\mathrm{match}}^{\mathrm{perf}}(K_{n,n})$ (also die konvexe Hülle aller $n \times n$-Permutationsmatrizen).

Korollar 8.38

Es gilt: $\mathrm{P}_{\mathrm{birk}}(n) \;=\; \{x \in [0,1]^{E_{n,n}} \;:\; \mathrm{Inz}(K_{n,n})x = \mathbb{1}_V\}$.

Definition 8.39

Eine Matrix $M \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ist **doppelt-stochastisch**, wenn $\mathbb{1}_n{}^{\mathsf{T}} M = \mathbb{1}_n{}^{\mathsf{T}}$ und $M\mathbb{1}_n = \mathbb{1}_n$ gelten.

Korollar 8.40

Eine Matrix ist genau dann doppelt-stochastisch, wenn sie Konvexkombination von Permutationsmatrizen ist.

Matchings und Knotenüberdeckungen

- Für bipartite Graphen G gilt (weil $\mathrm{Inz}(G)$ TU):

$$\begin{aligned}
&\max\{\langle \mathbb{1}_E, x\rangle : \mathrm{Inz}(G)x \le \mathbb{1}_V, x \in \{0,1\}^E\} \\
&\quad = \max\{\langle \mathbb{1}_E, x\rangle : \mathrm{Inz}(G)x \le \mathbb{1}_V, x \in \mathbb{R}_+^E\} \\
&\quad = \min\{\langle \mathbb{1}_V, y\rangle : \mathrm{Inz}(G)^\mathsf{T} y \ge \mathbb{1}_E, y \in \mathbb{R}_+^V\} \\
&\quad = \min\{\langle \mathbb{1}_V, y\rangle : \mathrm{Inz}(G)^\mathsf{T} y \ge \mathbb{1}_E, y \in \{0,1\}^V\}
\end{aligned}$$

Definition 8.41

Eine **Knotenüberdeckung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $S \subseteq V$ mit $e \cap S \neq \varnothing$ für alle $e \in E$.

Satz 8.42

In bipartiten Graphen stimmen die größte Kardinalität eines Matchings und die kleinste Kardinalität einer Knotenüberdeckung überein.

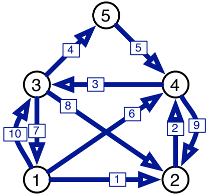
Definition und totale Unimodularität

Definition 8.43

Die *Inzidenzmatrix* eines (einfachen) gerichteten Graphen $D = (V, A)$ ist die Matrix $\mathrm{Inz}(D) \in \{-1, 0, 1\}^{V \times E}$ mit

$$\mathrm{Inz}(D)_{v,a} = \begin{cases} -1 & \text{falls } a = (v, w) \text{ für ein } w \in V \\ +1 & \text{falls } a = (w, v) \text{ für ein } w \in V \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $v \in V$ und $a \in A$



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \\ +1 & -1 & 0 & \cdots & +1 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & -1 & 0 & +1 \\ 0 & +1 & +1 & \cdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Satz 8.44

Inzidenzmatrizen gerichteter Graphen sind total unimodular.

Zirkulationen

Definition 8.45

Für einen gerichten Graphen $D = (V, A)$ und *Kapazitätsschranken* $l, u \in \mathbb{R}^A$ heißen die Punkte in

$$\mathrm{Circ}(D, l, u) \ := \ \{x \in \mathbb{Q}^A \ : \ \mathrm{Inz}(D)x = \mathbb{O}_V, l \leq x \leq u\}$$

Zirkulationen (zu den Kapazitätsschranken l und u) in D.

Definition 8.46

Für $D = (V, A)$ und $v \in V$ definiere:

$$\begin{aligned} \delta^{\text{aus}}(v) \quad &:= \quad \{a \in A \ : \ a = (v, w) \text{ für ein } w \in V\} \\ \delta^{\text{ein}}(v) \quad &:= \quad \{a \in A \ : \ a = (u, v) \text{ für ein } u \in V\} \end{aligned}$$

- Für $x \in \mathbb{R}^A$ mit $l \leq x \leq u$ ist also genau dann $x \in \mathrm{Circ}(D, l, u)$, wenn $\sum_{a \in \delta^{\text{aus}}(v)} x_a = \sum_{a \in \delta^{\text{ein}}(v)} x_a$ für alle $v \in V$ gilt (**Kirchhoffs Gesetz**).

Kostenminimale Zirkulationen

- Für $l, u \in \mathbb{Z}^A$ und $c \in \mathbb{R}^A$ gilt (weil $\mathrm{Inz}(D)$ TU ist):

$$\begin{aligned}&\min\{\langle c, x\rangle \,:\, x \in \mathrm{Circ}(D, l, u)\}\\ &\qquad = \min\{\langle c, x\rangle \,:\, x \in \mathrm{Circ}(D, l, u) \cap \mathbb{Z}^A\}\end{aligned}$$

Satz 8.47

In einem Netzwerk $D = (V, A)$ mit durch ganzzahlige Vektoren $l, u \in \mathbb{Z}^A$ definierten Kapazitätsintervallen, für die es überhaupt Zirkulationen gibt (d.h. es ist $\mathrm{Circ}(D, l, u) \neq \varnothing$), gibt es für jeden Kostenvektor unter den kostengünstigsten Zirkulationen auch eine mit ganzzahligen Flussmengen auf allen Bögen.

Korollar 8.48

(Ganzzahlige) kostenminimale Zirkulationen können mit linearer Optimierung in polynomialer Zeit berechnet werden.

- Besser: Kombinatorische Algorithmen (VL WiSem 14/15)

Kürzeste Wege

Definition 8.49

Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph. Eine Sequenz $(v_0, v_1, \ldots, v_l)$ von paarweise verschiedenen Knoten $v_i \in V$ mit $(v_{i-1}, v_i) \in A$ für alle $i \in [l]$ definiert den v_0–v_l-*Weg*

$$\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{l-1}, v_l)\} \subseteq A .$$

Ist $l \geq 1$ und $(v_l, v_0) \in A$, so ist

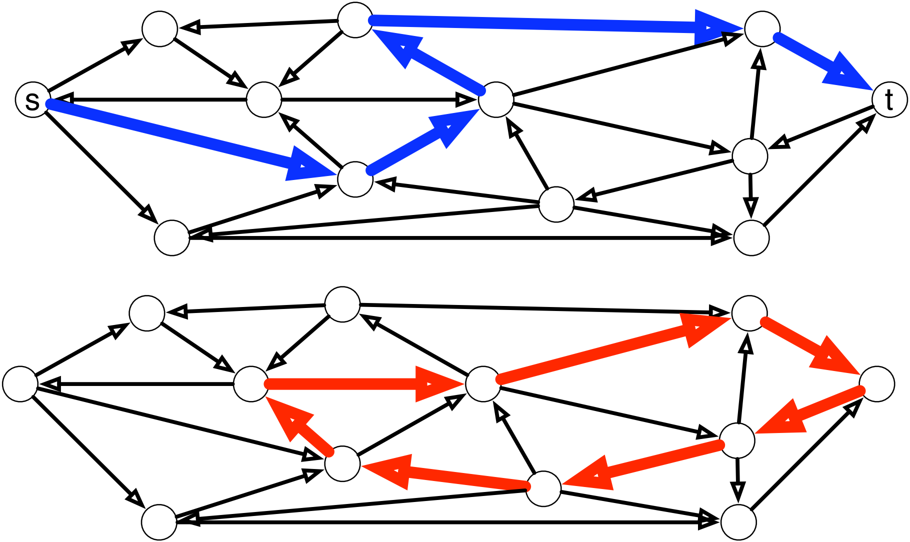
$$\{(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{l-1}, v_l), (v_l, v_0)\} \subseteq A$$

ein *Kreis* in D. Für Bogenlängen $c \in \mathbb{Q}^A$ und einen Weg oder Kreis $B \subset A$ in D ist

$$c(B) := \sum_{a \in B} c_a$$

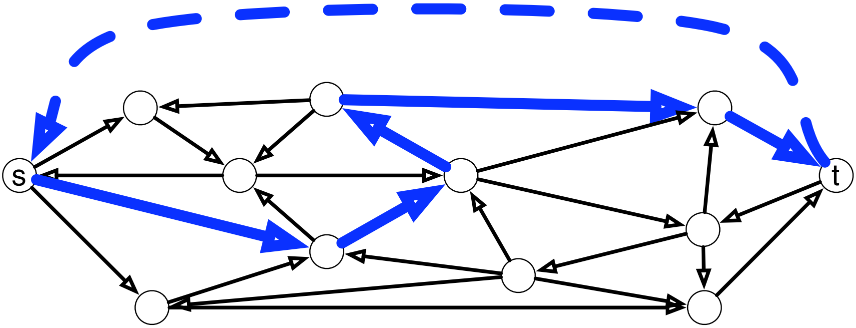
die *c-Länge* von B. Die c-Länge eines bezüglich c kürzesten s–t-Weges ist die *c-Distanz* zwischen s und t

Beispiele



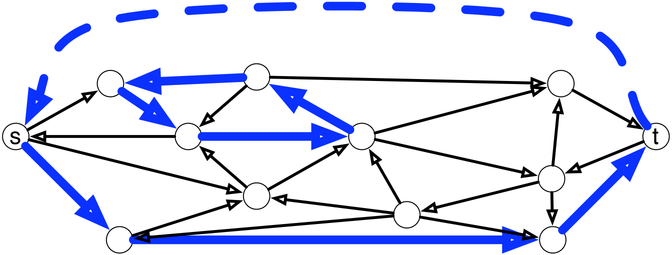
Wege und Zirkulationen

- Sei $P \subset A$ ein s–t-Weg in D.
- Dann: $K := P \cup \{(t, s)\}$ Kreis in D
- Charakteristischer Vektor $\chi(K) \in \{0, 1\}^A$: ganzzahlige Zirkulation in $\mathrm{Circ}(D, \mathbb{e}_{(t,s)}, \mathbb{1}_A) \cap \mathbb{Z}^A$



Zirkulationen und Wege

- Für $x \in \mathrm{Circ}(D, \mathbb{e}_{(t,s)}, \mathbb{1}_A) \cap \mathbb{Z}^A$ gilt: $x = \chi(B)$ für eine diskunkte Vereinigung $B \subseteq A$ von Kreisen in D mit $(t,s) \in B$.



- Ist $c \in \mathbb{Q}^A$ mit $c_{(t,s)} = 0$ so, dass kein Kreis in D negative c-Länge hat, so modelliert

$$\min\{\langle c, x\rangle \; : \; x \in \mathrm{Circ}(D, \mathbb{e}_{(t,s)}, \mathbb{1}_A) \cap \mathbb{Z}^A\}$$

das Problem, einen c-kürzesten s–t-Weg in D zu bestimmen.

LP-Dualität

$$
\begin{aligned}
& \min\{\langle c, x\rangle \ : \ x \in \operatorname{Circ}(D, \mathbb{e}_{(t,s)}, \mathbb{1}_A) \cap \mathbb{Z}^A\} \\
= \ & \min\{\langle c, x\rangle \ : \ x \in \operatorname{Circ}(D, \mathbb{e}_{(t,s)}, \mathbb{1}_A)\} \\
= \ & \min\{\langle c, x\rangle \ : \ \operatorname{Inz}(D)x = \mathbb{0}_V, \mathbb{e}_{(t,s)} \leq x \leq \mathbb{1}_A\} \\
= \ & \max\{-\underline{z}_{(t,s)} + \langle \mathbb{1}_A, \overline{z}\rangle : \operatorname{Inz}(D)^{\mathsf{T}} y - \underline{z} + \overline{z} = c, \underline{z}, \overline{z} \in \mathbb{R}^A_-, y \in \mathbb{R}^V\} \\
= \ & \max\{z_{(t,s)} \ : \ \operatorname{Inz}(D)^{\mathsf{T}} y + z = c, z \in \mathbb{R}^A_+, y \in \mathbb{Q}^V\} \\
= \ & \max\{y_t - y_s \ : \ y_w - y_v \leq c_{(v,w)} \ ((v,w) \in A \setminus \{(t,s)\}), y \in \mathbb{R}^V\}
\end{aligned}
$$

Definition 8.50

Ein c-**Potenzial** von $D = (V, A)$ ($c \in \mathbb{R}^A$) ist ein Vektor $\pi \in \mathbb{R}^V$ mit

$$\pi_w \ \leq \ \pi_v + c_{(v,w)} \qquad \text{für alle } (v,w) \in A \, ;$$

seine s–t-**Potenzialdifferenz** ist $\pi_t - \pi_s$ (für $s, t \in V$).

Kombinatorische Dualität

Satz 8.51

Sind $s, t \in V$ zwei Knoten in einem Netzwerk $D = (V, A)$ (das wenigstens einen s–t-Weg enthält) mit Bogenlängen $c \in \mathbb{Q}^A$, bezüglich derer kein Kreis in D negative Länge hat, so ist die c-Distanz zwischen s und t die maximale s–t-Potenzialdifferenz aller c-Potenziale von D.