

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 2

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 07.11.2013 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1

(5 Punkte)

Aus der Algorithmischen Mathematik ist der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers $\text{ggT}(a, b)$ zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b$ bekannt:

Algorithmus : Euklidischer Algorithmus

Eingabe : $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b$

- 1 Solange $a \neq 0$ tue
- 2 $t \leftarrow a$
- 3 $a \leftarrow b \bmod a$ (Rest bei Division von b durch a)
- 4 $b \leftarrow t$
- 5 Ende

Ergebnis : b

Beweise, dass dieser Algorithmus das Ergebnis in polynomial (in der Bit-Länge der Eingabe) vielen Schritten liefert. Dabei darf die Korrektheit des Algorithmus verwendet werden.

Tipp: Schätze a von oben durch die Eingabelänge ab und beobachte, wie sich a nach 2 Schleifendurchläufen verändert hat, um eine obere Schranke an die Anzahl der Schleifendurchläufe zu erhalten.

Aufgabe 2

(3 Punkte)

Beweise Bemerkung 1.9 aus der Vorlesung: Hat eine streng konvexe Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Minimum, so nimmt sie es in einem eindeutig bestimmten Punkt an.

Aufgabe 3

(2+2 Punkte)

Seien eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und k Punkte $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in X$, sowie eine konvexe Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Beweise für jedes $x := \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{(i)}$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $\lambda \geq \mathbb{0}_k$, dass gilt:

(a) $x \in X$

(b) $f(x) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x^{(i)})$

Aufgabe 4

(6 Punkte)

Beweise Satz 1.10 aus der Vorlesung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann konvex und konkav, wenn sie affin ist.

Aufgabe 5

(4 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.8, Teil 1 aus der Vorlesung: Die konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge der konvexen Kombinationen von endlich vielen Punkten aus X .

Aufgabe 6

(2 Punkte)

Zeige, dass lineare Abbildungen konvexe Mengen auf konvexe Mengen abbilden.

Aufgabe 7

(3 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.36 aus der Vorlesung: Der polare Kegel eines Kegels ist ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Aufgabe 8

(3 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.28, Teil 1 aus der Vorlesung: Die konische Hülle einer konvexen Menge ist ein konvexer Kegel.