Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2013/2014

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 3

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 14.11.2013 oder vorher in G02-207b

Bitte beachten:

- Die Übung am 14.11. findet im Raum G22A-111 statt.
- Die Übung am 05.12. findet im Raum G02-210 statt.
- Die Klausur findet am 30.01.2013 von 15:15 bis 16:45 in G02-109 statt.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweise: Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn K alle konischen Kombinationen von Elementen aus K enthält.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein Krankenhaus möchte Ärzte einstellen, sodass an jedem der Wochentage $1, 2, \dots, 7$ eine Mindestanzahl an Ärzten $d_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \dots, 7)$ verfügbar ist. Jeder Arzt arbeitet für die zu planende Zeit jede Woche an den selben 5 aufeinanderfolgenden Tagen, wobei Tag 1 auf Tag 7 folgt, und ruht sich an den verbliebenen 2 Tagen aus.
Modelliere das Problem, möglichst wenig Ärzte einzustellen, als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (also ein lineares Optimierungsproblem mit der Restriktion, dass nur ganzzahlige Lösungsvektoren erlaubt sind). Erkläre, warum der Optimalwert Deines Modells tatsächlich gleich der minimalen Anzahl einzustellender Ärzte ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Durch die Definition

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \operatorname{tr}(A^\intercal B) = \operatorname{tr}(AB^\intercal)$$

für Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ definiert (das *Frobenius-Skalarprodukt*), wobei $\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii}$ die Spur von $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist. Sei $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und sei $\mathbb{S}^n_+ \subseteq \mathbb{S}^n$ die Menge aller positiv semidefiniten symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

Beweise, dass $(\mathbb{S}^n_+)^\circ \cap \mathbb{S}^n = -\mathbb{S}^n_+$ für den bezüglich des oben definierten Skalarprodukts in $\mathbb{S}^n$ gebildeten polaren Kegel von $\mathbb{S}^n_+$ gilt (in $\mathbb{S}^n$ ist der polare Kegel der positiv semidefiniten symmetrischen Matrizen also genau der Kegel der negativ semidefiniten symmetrischen Matrizen).

Tipp: Ist $A \in \mathbb{S}^n_+$ und bilden $z^{(1)}, \dots, z^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A (mit zugehörigen Eigenwerten λ_i), so ist $A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z^{(i)} {z^{(i)}}^\intercal$. Umgekehrt ist für $z \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $zz^\intercal$ positiv semidefinit.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Zeige, dass für jeden Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und jeden linearen Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$

$$(K \cap U)^\circ = K^\circ + U^\perp$$

gilt, wobei $U^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in U\}$ das orthogonale Komplement von U ist.

Hinweis: Mache ausgiebig Gebrauch von orthogonaler Projektion.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Beweise, dass die Kodierungslänge der Determinante einer Matrix $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ polynomiell in der Kodierungslänge von M ist.

Tipp: Schätze die Determinante einer *ganzzahligen* Matrix (Multiplikation mit Hauptnenner) ab. Benutze dazu die Leibniz-Formel und das Produkt

$$\prod_{(i,j)\in[n]\times[n]} (|M_{i,j}| + 1) \; .$$