Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2013/2014

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 5

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 28.11.2013 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweise die Aussage aus der Vorlesung:
Für $x^* \in P^{\leq}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{x^*}\left(P^{\leq}(A,b)\right) &= \left\{ y \in \mathbb{R}^n : \langle A_{i,*}, y\rangle \leq 0 \text{ für alle } i \in \underset{Ax\leq b}{\mathrm{Eq}}\left(x^*\right)\right\} \\ \mathrm{N}_{x^*}\left(P^{\leq}(A,b)\right) &= \mathrm{ccone}\left\{ A_{i,*} : i \in \underset{Ax\leq b}{\mathrm{Eq}}\left(x^*\right)\right\} \end{aligned}$$

Insbesondere sind also Radial- und Normalenkegel an Polyeder polyedrisch.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Beweise die Aussage aus der Vorlesung:
Für einen konvexen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x^* \in K$ gilt $\mathrm{N}_{x^*}(K) = \{y \in K^\circ : \langle y, x^*\rangle = 0\}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten das folgende konvexe Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \min & x^2+y^2+z^2 & & \\ \text{s.t.} & (x-5)^2+(y-5)^2+z^2 & \leq & 10 \\ & -x+y & = & 4 \end{array}$$

Konstruiere dazu das Tripel $(X_0, (g_i)_{i\in[m]}, (h_i)_{i\in[p]})$ und zeige die Regularität.

Rate eine Optimallösung (sie ist ganzzahlig) und beweise die Optimalität mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Wir betrachten das Polyeder $P^{\leq}([A|B],c) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + By \leq c\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ und $c \in \mathbb{R}^m$) und den Kegel $K := \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \lambda^\intercal B = \mathbb{O}_p\}$.

Beweise, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^\intercal Ax \leq \lambda^\intercal c \quad \forall \lambda \in K\}$ die Projektion von $P^{\leq}([A|B],c)$ auf die x-Variablen ist.

Beweise ferner, dass die Projektion ein Polyeder ist.

Tipp: Für Teil 1 könnte das Farkas-Lemma nützlich sein. Für Teil 2 muss man zeigen, dass man nur endlich viele der unendlich vielen via K erzeugten Ungleichungen benötigt.