Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2013/2014

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 6

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 05.12.2013 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Leite ein Farkas-Lemma (ähnlich der Seite 18, Kapitel 4 des Handouts) für allgemeine lineare Ungleichungssysteme (mit ≤- und ≥-Ungleichungen, Gleichungen, nicht-negativen, nicht-positiven und vorzeichenunbeschränkten Variablen) ab.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine weitere Klasse konvexer Optimierungsprobleme ist das sogenannte *second-order cone programming (SOCP)*, bei dem über

$$\mathbb{L}^q := \left\{ x \in \mathbb{R}^q : x_q \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{q-1} x_i^2} \right\}$$

(bzw. über kartesischen Produkten solcher Kegel) geschnitten mit einem affinen Unterraum optimiert wird.

Zeige mit Hilfe folgender Äquivalenz, dass dies eine Unterklasse von Semidefiniter Optimierung ist:

$$x \in \mathbb{L}^q \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_q & \dots & x_2 & x_1 \\ \vdots & \ddots & & \\ x_2 & & x_q & \\ x_1 & & & x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^q_+$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $b(x) = x^\intercal Bx + \langle c, x\rangle + \delta$ (mit $B \in \mathbb{S}^n_+$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$) eine konvexe quadratische Form. Modelliere die Nebenbedingung $b(x) \leq 0$ als SOCP-Bedingung. Charakterisiere dafür

$$(2Dx, 1 + \langle c, x\rangle + \delta, 1 - \langle c, x\rangle - \delta) \in \mathbb{L}^{\operatorname{rang}(B)+2} \ ,$$

wobei $B = D^\intercal D$ mit $D \in \mathbb{R}^{\operatorname{rang}(B)\times n}$ gilt.

Aufgabe 4 (4+2 Punkte)

Die aus Aufgabe 4 des letzten Übungsblattes bekannte Formulierung für Projektionen von Polyedern bildet u.a. die Grundlage für einen Algorithmus, der testet, ob ein gegebenes Polyeder $P = P^{\leq}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ leer ist. Dazu konstruieren wir die Projektion auf die ersten $n - 1$ Variablen, welche genau dann leer ist, wenn $P = \varnothing$ ist. Da das Problem für $n = 1$ trivial ist, ergibt sich ein einfaches rekursives Verfahren.

Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ die Variablen und P_x die genannte Projektion (d.h. das Bild der Projektionsabbildung). Finde eine endliche Beschreibung des Polyeders P_x (durch Ungleichungen), indem Du ein endliches Erzeugendensystem für den *Projektionskegel* (der Kegel K aus Aufgabe 4 des letzten Übungsblattes) aufstellst.

Zeige außerdem, wie man aus einer Lösung $x \in P_x$ eine Lösung $(x, y) \in P$ konstruiert.

Tipp: Es könnte reichen, für ein Erzeugendensystem 1 oder 2 Einträge strikt positiv zu wählen.