Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2013/2014

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 8

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 19.12.2013 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $c = (7, 6, 5, -2, 3) \in \mathbb{R}^5$, $b = (4, 3, 5, 1) \in \mathbb{R}^4$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Überprüfe mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $x^\star = \left(0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0\right)$ eine Optimallösung von $\max\left\{\langle c, x\rangle : Ax \leq b, x \geq \mathbb{O}_5\right\}$ ist.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte)

Wir betrachten das folgende sogenannte s-t-Fluss-Problem: Ein gerichteter Graph D mit Knotenmenge V und Bogenmenge A sei gegeben, sowie eine Quelle $s \in V$ und eine Senke $t \in V$. Es seien $w \in \mathbb{R}^A_+$ Kapazitäten auf den Bögen. Ein *Fluss* ist ein $x \in \mathbb{R}^A_+$ mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{lll} \sum\limits_{(v,w)\in A} x_{(v,w)} = \sum\limits_{(u,v)\in A} x_{(u,v)} & \text{für alle } v \in V \setminus \{s,t\} & \text{Flusserhaltung} \\ 0 \leq x_a \leq w_a & \text{für alle } a \in A & \text{Kapazitätsbeschränkung} \end{array}$$

Der *Wert* eines Flusses x ist $\sum\limits_{(s,u)\in A} x_{(s,u)}$. Seien nun $c \in \mathbb{R}^A_+$ Kosten für die Bögen. Die Kosten eines (s,t)-Flusses x sind als $\sum\limits_{a\in A} c_a x_a$ definiert.

(a) Modelliere das Problem, einen (s,t)-Fluss vom Wert 1 zu finden, dessen Kosten minimal sind, durch ein lineares Problem.

(b) Stelle das duale Problem auf.

In beiden Fällen sollen für das entsprechende LP nicht einfach Symbole für Matrizen/Vektoren, sondern einzelne (Un-)Gleichungen (quantifiziert mit “für alle …”) angegeben werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (3+3 Punkte)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_1, \dots, a_n$ paarweise verschieden. Betrachte das folgende LP.

$$\begin{aligned} \min \langle b, x\rangle - \langle b, y\rangle \\ \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} y_k = 1 \\ \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \langle a, x\rangle = \langle a, y\rangle \\ x, y \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Stelle das duale LP auf.

(b) Beweise, dass der negierte Optimalwert gleich

$$\min\left\{\max_{k=1,\dots,n} |b_k - \mu a_k - \beta| : \mu, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

ist, also der kleinste vertikale Maximalabstand einer Geraden zu den n Punkten (a_k, b_k).

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Zeige (mit elementaren Mitteln):

(a) $\operatorname{conv}(\{0,1\}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{0}_n \leq x \leq \mathbb{1}_n\}$ (n-dimensionaler 0/1-Würfel)

(b) $\operatorname{conv}(\{\mathbb{e}_1, \dots, \mathbb{e}_n\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbb{1}_n, x\rangle = 1, x \geq \mathbb{0}_n\}$ (($n-1$)-dim. Standardsimplex)