Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Comp.-Math. Matthias Walter
Wintersemester 2013/2014

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 9

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/emo/

Abgabe in der Übung am 09.01.2014 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1 (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde das Schere-Stein-Papier-Spiel als Beispiel für die Bestimmung des Equilibirums von Zwei-Personen-Nullsummenspielen ausgeführt. Nun spielen der Weihnachtsmann und der Osterhase dieses Spiel. Da der Weihnachtsmann Fäustlinge trägt, kann er allerdings die "Schere" nicht formen: Ihm stehen nur "Stein" und "Papier" zur Verfügung.
Bestimme das Equilibrium für diese Spielsituation mit der Methode der Vorlesung.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Nach dem Einbruch bietet der Museumsräuber die Beute (einen Rembrandt, einen Rubens und einen Renoir) den Hehlern (Katrin, Kim und Klaus) an. Jeder der Hehler kann höchstens ein Bild annehmen (mehr kann er nicht verkaufen, ohne Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen). Die folgende Tabelle zeigt, wieviel die Hehler für die Bilder bieten:

	Rembrandt	Rubens	Renoir
Katrin	100	80	60
Kim	100	60	60
Klaus	80	80	60

Unerstaunlicherweise möchte der Räuber die Bilder so verkaufen, dass sein Gewinn maximiert wird. In dieser Aufgabe werden Sie die Ideen der Vorlesung auf dieses Problem anwenden. Etwas allgemeiner formuliert sollen n Objekte an n Personen verteilt werden, so dass jede Person genau ein Objekt erhält. Dabei haben die verschiedenen Personen Vorlieben für die verschiedenen Objekte, die sich in Zahlen ausdrücken lassen. Genauer gesagt ist eine reelle $(n \times n)$-Matrix C gegeben, so dass Person k beim Erhalt von Objekt l den Gewinn $C_{k,l}$ erzielt. Man möchte eine Zuordnung der Objekte an die Personen finden, die den Gesamtgewinn optimiert, d.h. unter allen Permutationen $\pi : [n] \to [n]$ ist eine gesucht, die $\sum_l C_{\pi(l),l}$ maximiert.

(a) (Modellierung als lineares Programm mit Ganzzahligkeitsbedingungen) Beschreibe ein Polyeder P in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit den unten angegebenen Eigenschaften durch Aufstellen eines Systems aus Gleichungen und Ungleichungen.

(1) Die Menge aller erlaubten Zuordnungen steht in Bijektion mit den ganzzahligen Punkten in P.

(2) Bezeichnet $\pi \mapsto X(\pi)$ diese Bijektion, so gilt für jede Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und jede Zurodnung π

$$\sum_{k,l} X(\pi)_{k,l} C_{k,l} = \sum_l C_{\pi(l),l}$$

(b) Offensichtlich gibt es eine optimale fraktionale Lösung, bei der die Bilder (beliebig reell zerstückelt) auf die 3 Käufer aufgeteilt werden dürfen (trotzdem aber alle Teile verkauft werden und jeder Käufer in der Summe genau ein Bild bekommt). Beweise, dass es in diesem Fall (auch) optimal ist, wenn der Räuber Katrin den Renoir, Kim den Rembrandt, und Klaus den Rubens verschachert. Verwenden Sie dabei (a), den Satz vom komplementären Schlupf und LP-Dualität!

Aufgabe 3 (2+1 Punkte)

Sei $X \subseteq \{0,1\}^n$ eine beliebige 0/1-Menge im $\mathbb{R}^n$.

Beweise, dass die Eckenmenge des Polyeders $P := \operatorname{conv} X$ genau die Menge X ist.Überprüfe ferner, ob $P \cap \mathbb{Z}^n = X$ ist, d.h. ob P außer X noch weitere ganzzahlige Punkte enthält.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

Wir betrachten das Polytop $Q \subseteq \mathbb{R}^3$, gegeben durch die äußere Beschreibung:

$$\begin{array}{rrrcrcl} x & & + & z & \le & 2 \\ & y & - & z & \le & 1 \\ -x & & + & z & \le & 2 \\ & -y & - & z & \le & 1 \\ & & & -z & \le & 0 \\ & & & z & \le & 1 \end{array}.$$

(a) Gib (ohne Beweis) eine innere Beschreibung von Q an.

(b) Finde mittels Fourier-Motzkin-Elimination (siehe Übungsblatt 6, Aufgabe 4) das Bild der Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ via $\pi : (x,y,z) \mapsto (x,y)$ und gib die Facetten an.

(c) Gib (mit geometrischem Beweis) eine innere Beschreibung von $\pi(Q)$ an.

Bemerkung: Vergleiche die Anzahl der Facetten von Q mit der von $\pi(Q)$.