Aufgabe

Sei P ein Polytop. Zeigen Sie, dass sich unter den minimalen Erweiterungspolyedern von P auch immer ein volldimensionales Polytop findet.

Lösung

Wir wählen (Q, π) als eine minimale Erweiterung von P, die kleinstmögliche Dimension hat. Wir haben in der Übung bereits gesehen, dass wir annehmen können, dass $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ volldimensional ist. Sei $Q' \subseteq \mathbb{R}^q$ ein Polytop, so dass $Q = Q' + \operatorname{char}(Q)$. Wir behaupten, dass $\operatorname{char}(Q) = \{\mathbb{O}\}$ gilt.

Angenommen nicht, sei $c \in \operatorname{char}(Q) \setminus \{\mathbb{O}\}$. Sei $\beta := \max\{\langle c, y\rangle : y \in Q'\}$. Setzen wir weiterhin $H := \{y \in \mathbb{R}^q : \langle c, y\rangle = \beta\}$ sowie $\tilde{Q} := Q \cap H$, so behaupten wir, dass $\pi(\tilde{Q}) = P$ gilt. Sicher gilt $\pi(\tilde{Q}) \subseteq P$. Andererseits sei $x \in P$. Dann existiert ein $y \in Q$ mit $\pi(y) = x$. Wir schreiben $y = y' + c'$ mit $y' \in Q'$ und $c' \in \operatorname{char}(Q)$. Nach der Wahl von β existiert ein $\lambda \geq 0$, so dass $\tilde{y} := y' + \lambda c \in H$ gilt. Damit erhalten wir $\tilde{y} \in \tilde{Q}$ sowie

$$\pi(\tilde{y}) = \pi(y') + \lambda \underbrace{\pi(c)}_{=0} = \pi(y') = \pi(y') + \underbrace{\pi(c')}_{=0} = \pi(y' + c') = \pi(y) = x,$$

weil wir in der Übung gesehen haben, dass $\operatorname{char}(Q) \subseteq \operatorname{Kern}(\pi)$ gilt. Also gilt auch $\pi(\tilde{Q}) \supseteq P$ und somit $\pi(\tilde{Q}) = P$. Nun ist jedoch $(\tilde{Q}, \pi)$ eine Erweiterung von P mit $\dim(\tilde{Q}) < \dim(Q)$, ein Widerspruch zur Wahl von Q. $\square$