Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 1

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 24. Oktober 2013

Aufgabe 1

Für ein Polytop $P \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{O} \in \operatorname{int} P$ sei das *Polare von P* definiert als

$$P^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in P \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) P^* ist ein Polytop mit $\mathbb{O} \in \operatorname{int} P^*$.

b) $(P^*)^* = P$.

(Hinweise: a) Betrachten Sie P in seiner inneren Darstellung. b) Jede für P gültige Ungleichung kann auf die Form $\langle a, x \rangle \leq 1$ gebracht werden.)

Aufgabe 2

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $\mathbb{O} \in \operatorname{int} P$. Für eine Seite $F \subseteq P$ sei

$$F^\diamond := \{ y \in P^* : \langle x, y \rangle = 1 \ \forall x \in F \}.$$

Zeigen Sie:

a) $F^\diamond$ ist eine Seite von P^*

b) $F \subseteq G \Rightarrow F^\diamond \supseteq G^\diamond$

c) $(F^\diamond)^\diamond = F$

d) $\dim F^\diamond = d - 1 - \dim F$

(vgl. Bemerkung 1.3 iii) der Vorlesung)

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ist P ein k-nachbarschaftliches d-Polytop mit $k > \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$, so ist P ein Simplex.

Nutzen Sie dafür den Satz von Radon:
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $|X| \geq d + 2$. Dann existieren zwei disjunkte Mengen $X_1, X_2 \subseteq X$, so dass $\operatorname{conv} X_1 \cap \operatorname{conv} X_2 \neq \emptyset$.

Aufgabe 4

Sei P ein d-Polytop. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) P ist ein Simplex.

ii) P hat $d + 1$ viele Ecken.

iii) P hat $d + 1$ viele Facetten.

iv) P ist einfach und simplizial.