Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 2

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 7. November 2013

Aufgabe 1
Sei $d \geq 3$ und P ein d-Polytop. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) P ist ein Simplex.

ii) P hat $d+1$ viele Ecken.

iii) P hat $d+1$ viele Facetten.

iv) P ist einfach und simplizial.

Aufgabe 2
Beweisen Sie Bemerkung 1.12: Ist v eine Ecke eines einfachen Polytops P und W eine k-elementige Teilmenge der Nachbarn von v, so ist $P \cap \operatorname{aff}(W \cup \{v\})$ eine k-Seite von P.

Aufgabe 3
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop, $c \in \mathbb{R}^d$ und v eine Ecke von P. Zeigen Sie: Ist

$$\langle c, v\rangle < \max\{\langle c, x\rangle : x \in P\},$$

so existiert ein Nachbar w von v, so dass $\langle c, w\rangle > \langle c, v\rangle$.

Aufgabe 4
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein 0/1-Polytop, d.h., $\operatorname{vert}(P) \subseteq \{0,1\}^d$ mit $\dim(P) = k$. Zeigen Sie:

a) P ist affin isomorph zu einem 0/1-Polytop $Q \subseteq \mathbb{R}^k$.

b) Der Durchmesser von P ist höchstens k.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die *Hirsch-Vermutung* für 0/1-Polytope wahr ist:
Sei P ein 0/1-Polytop mit m Facetten und $\dim(P) = d$. Dann ist der Durchmesser von P höchstens $m - d$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $m < 2d$ und $m \leq 2d$ getrennt.)

Bitte wenden!

Aufgabe 6

Beweisen Sie den *Satz von Balinski*: Der Graph eines jeden d-Polytops ist d-fach knotenzusammenhängend, d.h. der Graph bleibt zusammenhängend, wann immer man $d-1$ Ecken mit ihren inzidenten Kanten entfernt.

Hinweise:

- Sind $v_1, \dots, v_{d-1}$ Ecken von P, so kann man eine Hyperebene finden, die die Punkte $v_1, \dots, v_{d-1}$ sowie irgendeine weitere Ecke v_0 von P enthält.
- Sei v eine Ecke von P, $c \in \mathbb{R}^d$ sowie $v_{\max}$, $v_{\min}$ eine maximale bzw. minimale Ecke von P bezüglich c. So existiert immer ein Weg von v nach $v_{\max}$ bzw. von v nach $v_{\min}$.