Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 3

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 14. November 2013

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die *Hirsch-Vermutung* für 0/1-Polytope wahr ist:
Sei P ein 0/1-Polytop mit m Facetten und $\dim(P) = d$. Dann ist der Durchmesser von P höchstens $m - d$.

(Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $m < 2d$ und $m \geq 2d$ getrennt.)

Aufgabe 2

Beweisen Sie den *Satz von Balinski*: Der Graph eines jeden d-Polytops ist d-fach knotenzusammenhängend, d.h. der Graph bleibt zusammenhängend, wann immer man $d-1$ Knoten mit ihren inzidenten Kanten entfernt.

Hinweise:

- Sind $v_1, \ldots, v_{d-1}$ Ecken von P, so kann man eine Hyperebene finden, die die Punkte $v_1, \ldots, v_{d-1}$ sowie irgendeine weitere Ecke v_0 von P enthält.
- Sei v eine Ecke von P, $c \in \mathbb{R}^d$ sowie $v_{\max}$, $v_{\min}$ eine maximale bzw. minimale Ecke von P bezüglich $\langle c, x \rangle$. So existiert immer ein Weg von v nach $v_{\max}$ bzw. von v nach $v_{\min}$.

Aufgabe 3

Sei P ein einfaches d-Polytop mit Eckenmenge V. Zeigen Sie: Eine Teilmenge von $W \subseteq V$ ist genau dann Eckenmenge einer Facette von P, wenn

- der von W induzierte Subgraph $d-1$-regulär ist und
- eine AUSO für P existiert, so dass keine Kante von $V \setminus W$ nach W orientiert ist.

Aufgabe 4

Sei P ein einfaches d-Polytop. Für eine azyklische Orientierung $\mathcal{O}$ des Graphen von G sei $h_k(\mathcal{O})$ die Anzahl von Ecken von P mit Eingangsgrad k (bezüglich $\mathcal{O}$). Sei weiterhin

$$h(\mathcal{O}) := \sum_{k=0}^{d} h_k(\mathcal{O}) \cdot 2^k$$

sowie $h_{\min} := \min\{h(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \text{ azyklische Orientierung von } P\}$. Zeigen Sie für eine azyklische Orientierung $\mathcal{O}$:

a) $h(\mathcal{O}) = \sum_{F \text{ Seite von } P} (\#\text{Senken von } \mathcal{O} \text{ in } F)$

b) $\mathcal{O}$ ist genau dann eine AUSO, wenn $h(\mathcal{O}) = h_{\min}$.

Aufgabe 5

Folgern Sie aus Aufgaben 4 und 5, dass der Seitenverband eines einfachen Polytops durch seinen Graphen eindeutig definiert ist.