Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 4

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 21. November 2013

Auf diesem Übungsblatt betrachten wir Orientierungen des Graphen von $[0,1]^n$. Eine Orientierung $\mathcal{O}$ heißt *unique sink orientation* (USO), falls jede nichtleere Seite von $[0,1]^n$ genau eine Senke (bezüglich $\mathcal{O}$) enthält. Für eine Ecke $v \in \{0,1\}^n$ und $i \in [n]$ sei $v \oplus i \in \{0,1\}^n$ definiert durch

$$(v \oplus i)_j = \begin{cases} 1 - v_i, & \text{falls } j = i \\ v_j, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir sind daran interessiert, die Senke einer gegebenen USO zu finden. Dabei nehmen wir an, dass jede Orientierung $\mathcal{O}$ nur implizit gegeben ist: Für jede Ecke $v \in \{0,1\}^n$ können wir lediglich den Wert der Funktion

$$\text{out}_{\mathcal{O}}(v) := \{i \in [n] : \{v, v \oplus i\} \text{ zeigt aus } v \text{ heraus } \}$$

abrufen. Eine solche Abfrage nennen wir *Nachbarschafts-Abfrage*. Von einem Algorithmus, der die Senke in $[0,1]^n$ finden soll, fordern wir hier aus technischen Gründen, dass er auch auf der gefundenen Senke eine Nachbarschafts-Anfrage stellt. Sei nun $t(n)$ die kleinste Zahl, so dass es einen Algorithmus gibt, der die Senke einer implizit gegebenen USO in $[0,1]^n$ bestimmt (sowie auf ihr $\text{out}_{\mathcal{O}}$ auswertet) und mit höchstens $t(n)$ Nachbarschafts-Abfragen auskommt. Mit dieser Definition haben wir $t(0) = 1$ sowie $t(1) = 2$. Sicher gilt allgemein $t(n) \leq 2^n$.

Aufgabe 1

Zum Warmwerden:

a) Randomisiert: Zeigen Sie, dass es einen randomisierten Algorithmus gibt, der die Senke t in $[0,1]^n$ sowie $\text{out}_{\mathcal{O}}(t)$ bestimmt und im Erwartungswert höchstens 1.5^n viele Nachbarschafts-Abfragen durchführt.

b) Deterministisch: Zeigen Sie, dass $t(n) \leq 2^{n-1} + 1$ gilt.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{O}$ eine USO von $[0,1]^n$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\text{out}_{\mathcal{O}} \colon \{0,1\}^n \to 2^{[n]}$, $v \mapsto \text{out}_{\mathcal{O}}(v)$ bijektiv ist. (Hinweis: Gilt $\text{out}_{\mathcal{O}}(v) = \text{out}_{\mathcal{O}}(w)$, so betrachten Sie die Orientierung $\mathcal{O}'$, die man aus $\mathcal{O}$ erhält, wenn wenn man die Richtung aller Kanten der Form $\{a, a \oplus i\}$ mit $i \in \text{out}_{\mathcal{O}}(a)$ und $a \in \{0,1\}^n$ umkehrt. Machen Sie sich klar, dass dann auch $\mathcal{O}'$ eine USO ist.)

Aufgabe 3

Zwei Seiten F, G von $[0,1]^n$ heißen *antipodal*, falls G der Schnitt der Facetten ist, die den F-enthaltenden Facetten gegenüberliegen. Die *Fibonacci-Schaukel* ist eine Prozedur, um die Senke einer USO $\mathcal{O}$ zu finden. Sie bestimmt für jedes $i = 0, \ldots, n-1$

- zwei antipodale i-Seiten F_i und G_i,
- deren Senken v_i bzw. w_i sowie
- $\mathrm{out}_{\mathcal{O}}(v_i)$ und $\mathrm{out}_{\mathcal{O}}(w_i)$.

Ist sie schließlich bei $i = n-1$ angelangt, so sind F_{n-1} und G_{n-1} antipodale Facetten von deren Senken genau eine die Senke von $[0,1]^n$ ist. Sei $t^*(n)$ die kleinste Zahl, so dass eine Implementierung der Fibonacci-Schaukel existiert, die mit höchstens $t^*(n)$ vielen Nachbarschafts-Abfragen auskommt. Zeigen Sie, dass

$$t^*(n) \leq 2 + t^*(0) + t^*(1) + \ldots + t^*(n-2)$$

für $n \geq 1$ gilt. (Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 2.)

Aufgabe 4

Folgern Sie aus Aufgabe 3, dass $t(n) = O(1.62^n)$ gilt. (Hinweis: Fibonacci-Folge)