Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 1

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 28. November 2013

Aufgabe 1

Sei $P \coloneqq \operatorname{conv}\left(\{x \in \{0,1\}^n : \sum_{i=1}^n x_i \text{ ist durch 3 teilbar}\}\right)$. Geben sie eine erweiterte Formulierung für P der Größe $\mathcal{O}(n)$ an.

Aufgabe 2

Sei P ein Polytop. Zeigen Sie, dass sich unter den minimalen Erweiterungspolyedern von P auch immer ein volldimensionales Polytop findet.

Aufgabe 3

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Polytop, $Q \subseteq \mathbb{R}^q$ ein Polyeder sowie $\pi\colon \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ eine lineare Projektion mit $\pi(Q) = P$. Zeigen Sie, dass ein Polyeder $Q' \subseteq \mathbb{R}^{q'}$ existiert mit:

- Die Projektion von Q' auf die ersten p Koordinaten ist P.
- Q' ist linear isomorph zu Q.

Aufgabe 4

Sei $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q : Ax + By \le b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ein Polyeder und $\pi\colon \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ die Projektion auf die x-Variablen. Der *Projektionskegel* von Q bezüglich π ist definiert als

$$C \coloneqq \left\{y \in \mathbb{R}^m_+ : y^T B = \mathbb{O}_q\right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\pi(Q) = \{x \in \mathbb{R}^p : y^T A x \le y^T b \text{ für alle } y \in C\}$.

b) Folgern Sie daraus, dass $\pi(Q)$ ein Polyeder ist.

(Hinweis: Für Teil a) könnte das Farkas-Lemma nützlich werden.)

Aufgabe 5

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^3$ das Polyeder, das durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\le 2y - 3z \\ y &\le 2z + 4 \\ 2y + z &\le 18 \\ z &\le 10 \\ y, z &\ge 0 \end{aligned}$$

definiert ist. Berechnen Sie die Projektion von P auf die x-Koordinate.