Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 6

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 5. Dezember 2013

Aufgabe 1
Sei P ein Polytop und (Q, π) eine Erweiterung von P. Sei weiterhin $F \subseteq P$ eine Seite von P. Zeigen Sie, dass $\pi^{-1}(F) \cap Q$ eine Seite von Q ist.

Aufgabe 2
Sei $P = P^{\leq}(A, b)$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{homog}(P) = \left\{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : Ax \leq x_{n+1} \cdot b,\ x_{n+1} \geq 0\right\}$$

Aufgabe 3
Sei $P \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Polytop mit $\dim(P) \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Ungleichung $x_{n+1} \geq 0$ in obiger Beschreibung von $\operatorname{homog}(P)$ redundant ist.

Aufgabe 4
Gegeben seien n Jobs, deren Bearbeitungsdauern $p_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ gegeben sind. Eine Permutation $\sigma\colon [n] \to [n]$ identifizieren wir mit der Reihenfolge, in der die Jobs auf einer Maschine nacheinander ausgeführt werden, d.h. $\sigma(i) = j$, falls Job i der j-te Job ist, den die Maschine ausführt. Für einen Job i ist damit $f(p, \sigma)_i := \sum_{j=1}^{\sigma(i)} p_{\sigma^{-1}(j)}$ der Zeitpunkt, zu dem die Maschine die Bearbeitung von Job i abgeschlossen hat.

Geben Sie einen Algorithmus an, der für gegebene Kosten $c \in \mathbb{R}^n$, die Funktion $\sigma \mapsto \langle c, f(p, \sigma)\rangle$ über alle Permutationen σ minimiert.

(Hinweis: Betrachten Sie die Quotienten $\frac{c_i}{p_i}$.)

Aufgabe 5
Sei $D = ([n], A)$ der vollständige Digraph auf n Knoten sowie $p_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Eine *Orientierung* $\mathcal{O} \subseteq A$ des Graphen D ist eine Auswahl von Bögen, so dass für jedes Paar $i, j \in [n]$, $i \neq j$ entweder $(i, j) \in \mathcal{O}$ oder $(j, i) \in \mathcal{O}$ gilt. Für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ sei das Gewicht einer Orientierung definiert als $c(\mathcal{O}) := \sum_{(i,j) \in \mathcal{O}} c_j \cdot p_i$.

Zeigen Sie, dass $\min\{c(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \text{ Orientierung von } D\}$ von einer azyklischen Orientierung angenommen wird.

Aufgabe 6
Für $n \geq 1$ und $p_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ sei

$$P := \operatorname{conv}\left(\{f(p, \sigma) \in \mathbb{R}^n : \sigma\colon [n] \to [n] \text{ Permutation}\}\right)$$

das *completion time polytope*. Zeigen Sie, dass das Polytop

$$Q := \{y \in [0,1]^{n \times n} : \begin{array}{l} y_{i,j} = 1 - y_{j,i} \text{ für alle } i \neq j \\ y_{i,i} = 1 \text{ für alle } i \in [n] \end{array} \}$$

zusammen mit der Projektion $\pi(y)_j := \sum_{i=1}^n p_i y_{i,j}$ eine Erweiterung für P ist.