Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 7

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 12. Dezember 2013

Completion Time Polytope

Aufgabe 1

Sei $D = ([n], A)$ der vollständige Digraph auf n Knoten sowie $p_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$. Eine *Orientierung* $\mathcal{O} \subseteq A$ des Graphen D ist eine Auswahl von Bögen, so dass für jedes Paar $i, j \in [n]$, $i \neq j$ entweder $(i,j) \in \mathcal{O}$ oder $(j,i) \in \mathcal{O}$ gilt. Für einen Vektor $c \in \mathbb{R}^n$ sei das Gewicht einer Orientierung definiert als $c(\mathcal{O}) := \sum_{(i,j)\in\mathcal{O}} c_j \cdot p_i$.

Zeigen Sie, dass $\min\{c(\mathcal{O}) : \mathcal{O} \text{ Orientierung von } D\}$ von einer azyklischen Orientierung angenommen wird.

Aufgabe 2

Für $n \geq 1$ und $p_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$ sei

$$P := \operatorname{conv}\left(\{f(p,\sigma) \in \mathbb{R}^n : \sigma\colon [n] \to [n] \text{ Permutation}\}\right)$$

das *completion time polytope* (Notation $f(p,\sigma)$ siehe Übungsblatt 6). Zeigen Sie, dass das Polytop

$$Q := \{y \in [0,1]^{n\times n} : y_{i,j} = 1 - y_{j,i} \text{ für alle } i \neq j \\ y_{i,i} = 1 \text{ für alle } i \in [n] \quad \}$$

zusammen mit der Projektion $\pi(y)_j := \sum_{i=1}^n p_i y_{i,j}$ eine Erweiterung für P ist.

Spannbaum-Polytop

Aufgabe 3

Einfach: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{p+k}$ ein Polyeder, $c \in \mathbb{R}^k$ und

$$P = \{x \in \mathbb{R}^p : \langle a, x\rangle + \langle b, c\rangle \leq 0 \ \forall\, (a,b) \in Q\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Satz 2.11 aus der Vorlesung, dass

$$\operatorname{xc}(P) \leq \operatorname{xc}(Q) + 1$$

gilt.

Aufgabe 4

Sei (V,E) der vollständige ungerichtete Graph auf n Knoten sowie $w \in V$. Sei weiterhin $x \in [0,1]^E$. Zeigen Sie, dass folgende Bedingungen äuqivalent sind:

a) $x(E(S)) \leq |S| - 1$ für alle $\varnothing \neq S \subseteq V$ mit $w \in S$

b) $\max\left\{\sum_{e\in E} x_e a_e - \sum_{v\in W\setminus\{w\}} b_v : b_v \geq 0 \ \forall\, v \in V \setminus \{w\},\ a_e \leq b_v \ \forall\, e \in \delta(v), v \in V\right\} = 0$

(Hinweis: Machen Sie sich klar, dass das System in b) durch eine TU-Matrix beschrieben wird.)

Bitte wenden!

Aufgabe 5

Sei (V, E) der vollständige ungerichtete Graph auf n Knoten. Das *Spannbaum-Polytop* $P_{\text{spt}} \subseteq [0,1]^E$ ist definiert als konvexe Hülle aller charakteristischen Vektoren von Spannbäumen in (V, E). Es ist bekannt[1], dass P_{spt} die Lösungsmenge des folgenden Ungleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} x(E) &= n - 1 \\ x(E(S)) &\leq |S| - 1 \ \forall \ \emptyset \neq S \subseteq V \\ x &\in [0,1]^E \end{aligned}$$

Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgaben 1 und 2, dass $\operatorname{xc}(P_{\text{spt}}) \in \mathcal{O}(n^3)$ gilt.

[1] Kombinatorische Optimierung: Das Baum-Polytop ist ein Matroid-Polytop.