Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 8

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 16. Januar 2014

Slack-Matrizen und Fooling Sets

Aufgabe 1

Sei $P = P^{\leq}(A, b)$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und Eckenmenge $v_1, \ldots, v_k$. Sei $S \in \mathbb{R}_+^{m \times k}$ die *Slack-Matrix* von P, deren j-te Spalte $b - Av_j$ ist. Zeigen Sie, dass P affin isomorph zur konvexen Hülle der Spalten von S ist.

Aufgabe 2

Wie findet sich ein Fooling Set in einer Slack-Matrix wieder?

Aufgabe 3

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, so dass $S_{ii} \neq 0$ für alle $i \in [n]$ sowie $S_{ij} \cdot S_{ji} = 0$ für alle $i, j \in [n]$ mit $i \neq j$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{rang}(S) \geq \sqrt{n}$ gilt.

Hinweise:

- Betrachten Sie das *Kronecker-Produkt*[1] $A := S \otimes S^T$.
- Zeigen Sie, dass A eine reguläre Diagonalmatrix der Größe $n \times n$ als Submatrix enthält.

Aufgabe 4

Sei $P = P^{\leq}(A, b)$ ein Polytop sowie $\omega(P)$ die bestmögliche fooling set bound für die Nicht-Inzidenzmatrix mit $\mathcal{F}_1 = \{\text{Ecken von } P\}$ und $\mathcal{F}_2 = \{\text{Seiten, die zu } Ax \leq b \text{ gehören}\}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgaben 2, 3 und 4, dass

$$\omega(P) \leq (\dim(P) + 1)^2$$

gilt.

Correlation-, Cut- und TSP-Polytope

Aufgabe 5

Sei $K_n = ([n], E)$ der vollständige ungerichtete Graph auf n Knoten und

$$\mathrm{CUT}(n) := \{\chi(\delta(S)) : S \subseteq [n]\} \subseteq [0,1]^E$$

das zugehörige *Cut-Polytop*. Zeigen Sie, dass $\mathrm{COR}(n-1)$ linear isomorph zu $\mathrm{CUT}(n)$ ist.

(Hinweis: Identifizieren Sie eine Ecke $x \in \mathrm{COR}(n-1)$ mit der Menge $S_x := \{i \in [n-1] : x_{ii} = 1\}$.)

Bitte wenden!

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Kronecker-Produkt

Aufgabe 6

Sei ϕ_n eine 3-SAT-Formel in Variablen $x_1, \dots, x_n \in \{0,1\}$. Das zugehörige *3-SAT-Polytop* sei definiert als

$$P_{\phi_n} := \operatorname{conv}\left(\{x \in \{0,1\}^n : \phi_n(x) \text{ ist wahr}\}\right).$$

Zeigen Sie, dass es 3-SAT-Formeln ϕ_n gibt, so dass $\operatorname{xc}\left(P_{\phi_n}\right) = 2^{\Omega(\sqrt{n})}$ gilt.

(Hinweis: Zeigen Sie, dass es eine 3-SAT-Formel $\phi' = \phi_{n^2}$ mit $\mathcal{O}(n^2)$ Klauseln gibt, so dass

$$\phi'(x) \text{ ist wahr} \iff x \in \mathrm{COR}(n)$$

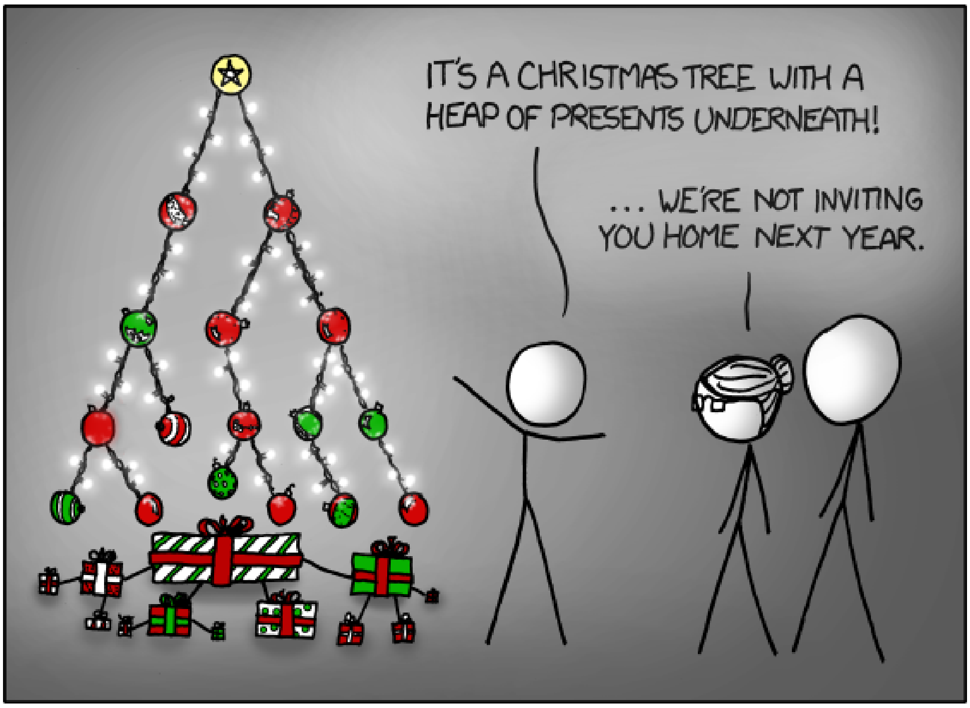
für alle $x \in \{0,1\}^{n^2}$ gilt.)

Bemerkung

Man kann mit Reduktionstechniken wie in Aufgabe 6 zeigen, dass zu jedem 3-SAT-Polytop P_{ϕ_n} ein TSP-Polytop $\mathrm{TSP}(n')$ mit $n' = \mathcal{O}(n)$ existiert, so dass P_{ϕ_n} Projektion einer Seite von $\mathrm{TSP}(n')$ ist. Somit gilt $\operatorname{xc}(\mathrm{TSP}(n')) \geq \operatorname{xc}(P_{\phi_n})$.

Insgesamt wissen wir damit:

$\operatorname{xc}(\mathrm{COR}(n)) = 2^{\Omega(n)}$	(Vorlesung)
$\operatorname{xc}(\mathrm{CUT}(n)) = 2^{\Omega(n)}$	(Aufgabe 5)
$\operatorname{xc}(\mathrm{TSP}(n)) = 2^{\Omega(\sqrt{n})}$	(Aufgabe 6, Bemerkung)



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!