Prof. Dr. Volker Kaibel
Dipl.-Math. Stefan Weltge
Wintersemester 2013/2014

Geometrische Methoden in der Diskreten Optimierung – Blatt 10

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise13/gmdo/

Besprechung: 30. Januar 2014

Definition
Für eine nichtnegative Matrix $S \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ sei der nichtnegative Rang $r_+(S)$ *von S das kleinste $r \geq 1$, so dass nichtnegative Matrizen $L \in \mathbb{R}_+^{m\times r}$, $L \in \mathbb{R}_+^{r\times k}$ mit $S = L \cdot R$ existieren.*

Faktorisierungs-Theorem (Yannakakis '91)
Ist P ein Polytop mit Slack-Matrix S, so gilt

$$\operatorname{xc}(P) = r_+(S).$$

Aufgabe 1
Sei $P = P^{\leq}(A,b)$ ein Polytop mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, wobei jede Ungleichung in $Ax \leq b$ für mindestens einen Punkt aus P mit Gleichheit erfüllt werde. Sei weiterhin $S \in \mathbb{R}_+^{m\times k}$ eine Slack-Matrix von P. Zeigen Sie, dass das Faktorisierungs-Theorem gilt. Gehen Sie folgendermaßen vor:

a) Es gelte $S = L{\cdot}R$ für Matrizen $L \in \mathbb{R}_+^{m\times r}$, $L \in \mathbb{R}_+^{r\times k}$. Zeigen Sie, dass dann $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+r} : Ax + Ly = b,\ y \geq \mathbb{O}_r\}$ zusammen mit der Projektion auf die x-Koordinaten eine Erweiterung für P ist.

b) Sei $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n+l} : Bx + Cy \leq d\}$ mit $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{r\times l}$ zusammen mit der Projektion auf die x-Koordinaten eine Erweiterung für P. Nach dem Farkas-Lemma existiert nun für jedes $i \in [m]$ ein $\mu_i \in \mathbb{R}_+^r$, so dass $\mu_i^T B = A_{i,*}$, $\mu_i^T C = \mathbb{O}_r^T$ und $\langle \mu_i, d\rangle = b_i$ gilt (Warum?). Sei $L \in \mathbb{R}_+^{m\times r}$ die Matrix, deren Zeilen die Vektoren μ_i^T sind. Wie kann man $R \in \mathbb{R}_+^{r\times k}$ wählen, so dass $S = L \cdot R$ gilt?

Aufgabe 2
Sei P ein Polytop mit $\mathbb{O} \in \operatorname{int}(P)$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{xc}(P) = \operatorname{xc}(P^*)$$

gilt. (Erinnerung: P^* ist das Polare von P, vgl. Blatt 1)

Aufgabe 3
Sei $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Gitter[1] und $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine kompakte, konvexe, zentralsymmetrische Menge mit $\operatorname{vol}_n(K) \geq 2^d \cdot \det(\Lambda)$. Zeigen Sie, dass $(K \cap \Lambda) \setminus \{\mathbb{O}_n\} \neq \emptyset$ gilt.

Bitte wenden!

[1] Erinnerung: Ein Gitter ist das additive Erzeugnis einer Basis $b_1, \dots, b_d \subseteq \mathbb{R}^d$ des $\mathbb{R}^d$. Die Gitterdeterminante $\det(\Lambda)$ ist der Betrag der Determinante der Matrix, die $b_1, \dots, b_d$ als Spalten hat.

Aufgabe 4

Sei $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 38y \geq -15x + 60,\ x \geq 0.2\}$ ein Kegel. Nach Satz 3.7 der Vorlesung erhält man K_I, indem man zur äußeren Beschreibung von K einige Intersection Cuts hinzufügt. Skizzieren Sie diese Ungleichungen und zugehörige gitterpunktfreie konvexe Mengen.

Aufgabe 5

Zeigen oder widerlegen Sie: Die ganzzahlige Hülle eines Polytops ist der Schnitt seiner Corner-Polyeder.