

Vorlesung
Einführung
in die
Mathematische Optimierung
(Wintersemester 2016/17)

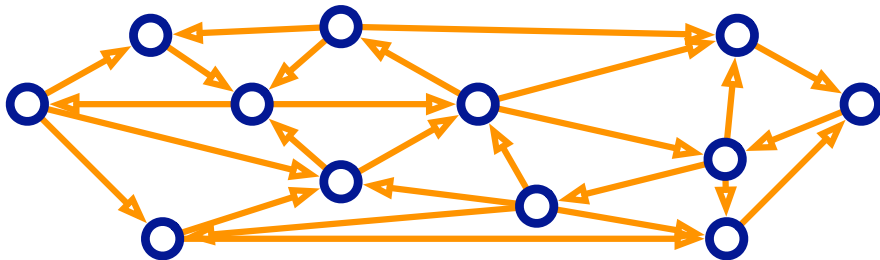
Einleitung

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 17. Oktober 2016)

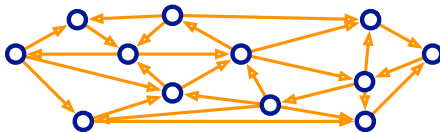
Kommunikationsnetzwerke...



Daten

- ▶ u_{ij} : Maximale Bitrate über Link (i, j)
- ▶ c_{ij} : Kosten Übertragung ein Bit über (i, j)
- ▶ $b^{k\ell}$: (Konstante) Bitrate von k nach ℓ

... Kommunikationsnetzwerke



Ziel

Route Daten unter minimalen Kosten.

Modellierung: Variablen

$x_{ij}^{k\ell}$: Datenrate für die Verbindung von k nach ℓ auf Link (i, j)

Können zulassen (weil Bitraten groß sind): $x_{ij}^{k\ell} \in \mathbb{R}$

Lineares Optimierungsmodell

Minimiere

$$\sum_{(i,j) \text{ Link}} \sum_k \sum_\ell c_{ij} x_{ij}^{k\ell}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j:(j,i) \text{ Link}} x_{ji}^{k\ell} - \sum_{j:(i,j) \text{ Link}} x_{ij}^{k\ell} = \begin{cases} -b^{k\ell} & (i = k) \\ b^{k\ell} & (i = \ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall i, k, \ell$$
$$\sum_k \sum_\ell x_{ij}^{k\ell} \leq u_{ij} \quad \forall (i,j)$$
$$x_{ij}^{k\ell} \geq 0 \quad \forall (i,j), k, \ell$$

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung

Optimierung von

- ▶ linearen Zielfunktionen

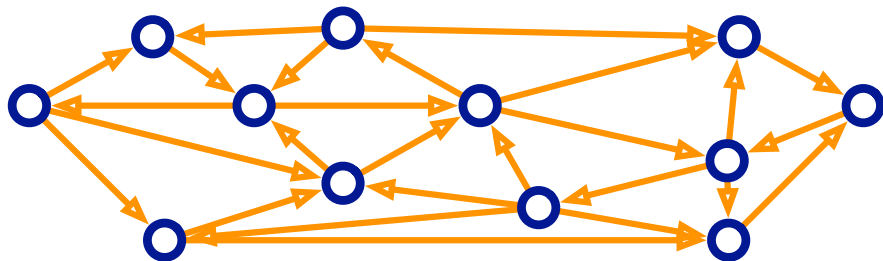
unter (endlich vielen)

- ▶ linearen Nebenbedingungen ($=$, \leq , \geq)

in (endlich vielen)

- ▶ kontinuierlichen Variablen.

Variante



Zusätzliche Daten

f_{ij} : Fixkosten für Verwendung von Link (i, j)

Zusätzliche Variablen

$y_{ij} \in \{0, 1\}$: 1, falls Link (i, j) verwendet, sonst 0

Gemischt ganzzahliges Modell

Minimiere

$$\sum_{(i,j) \text{ Link}} \sum_k \sum_\ell c_{ij} x_{ij}^{k\ell} + \sum_{(i,j) \text{ Link}} f_{ij} y_{ij}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j:(j,i) \text{ Link}} x_{ji}^{k\ell} - \sum_{j:(i,j) \text{ Link}} x_{ij}^{k\ell} = \begin{cases} -b^{k\ell} & (i = k) \\ b^{k\ell} & (i = \ell) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall i, k, \ell$$
$$\sum_k \sum_\ell x_{ij}^{k\ell} \leq u_{ij} y_{ij} \quad \forall (i,j)$$
$$x_{ij}^{k\ell} \geq 0 \quad \forall (i,j), k, \ell$$
$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i,j)$$

(Gemischt) Ganzzahlige Lineare Optimierung

Optimierung von

- ▶ linearen Zielfunktionen

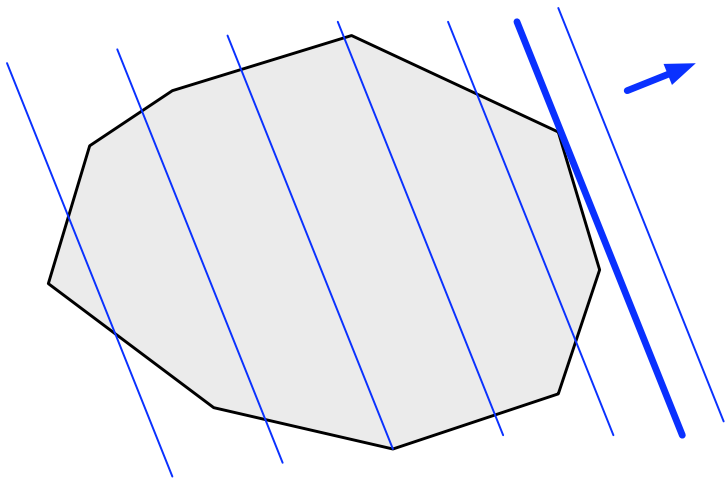
unter (endlich vielen)

- ▶ linearen Nebenbedingungen ($=$, \leq , \geq)

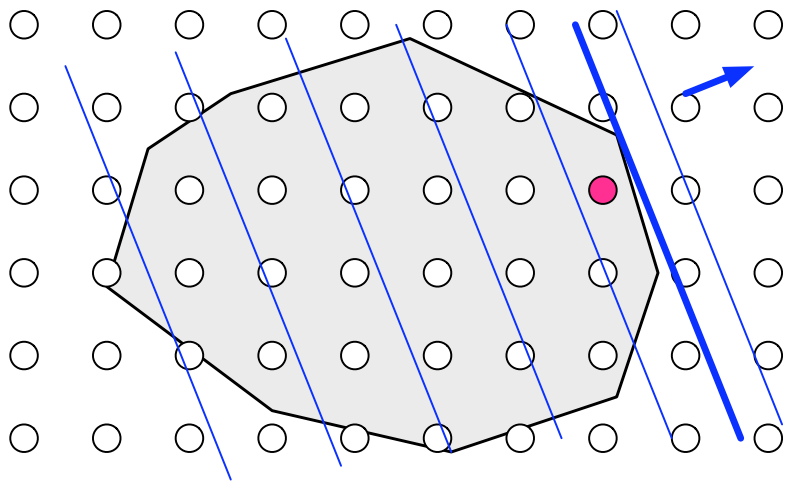
in (endlich vielen)

- ▶ Variablen, von denen einige nur ganzzahlige Werte annehmen dürfen.

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung



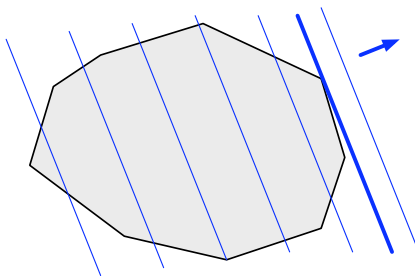
Ganzzahlige Lineare Optimierung...



... Ganzzahlige Lineare Optimierung

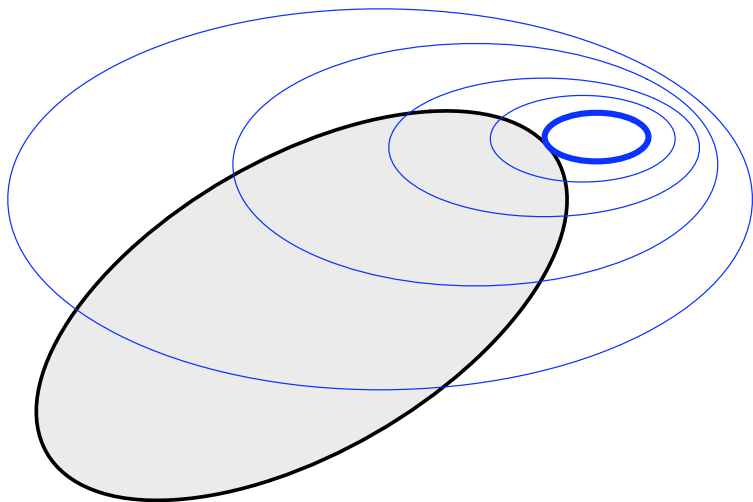
- ▶ Mächtig (z.B. 0/1-Entscheidungsvariablen)
- ▶ Baut auf (kontinuierlicher) LP auf
- ▶ Einblick am Ende dieser VL
- ▶ Vertiefung:
 - ▶ WiSem 17/18: VL *Kombinatorische Optimierung*
 - ▶ SoSem 18: VL *Ganzzahlige Optimierung*

(Kontinuierliche) Lineare Optimierung



- ▶ Sehr gutes strukturelles Verständnis (Zertifikate, Dualität)
- ▶ Theoretisch effizient lösbar (polynomial)
- ▶ Praktisch effizient lösbar
- ▶ Hintergrund: Konvexität

Konvexe Optimierung



Portfolio-Optimierung

Daten

- ▶ n Anlagemöglichkeiten (Anlage)
- ▶ Zu investierendes Kapital: $K = 1$
- ▶ R_i : Rendite Anlage i (Zufallsvariable)

Variablen

x_i : Anteil des in Anlage i investierten Kapitals

Gesamtrendite (Zufallsvariable)

$$G(x, R) = \sum_{i=1}^n R_i x_i$$

Optimierungsmodell

- ▶ Ziel: Maximale erwartete Rendite unter der Nebenbedingung, dass die Wahrscheinlichkeit, einen Anteil von b zu verlieren, höchstens α ist.
- ▶ Maximiere

$$\mathbb{E}[G(x, R)]$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_i &= 1 \\ \mathbb{P}[G(x, R) \geq -b] &\geq 1 - \alpha \\ x &\geq \mathbb{0} \end{aligned}$$

Optimierungsmodell (umformuliert)

Maximiere

$$\langle \bar{r}, x \rangle$$

unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \langle \mathbb{1}, x \rangle &= 1 \\ z_\alpha \sqrt{x^T C x} - \langle \bar{r}, x \rangle - b &\leq 0 \\ x &\geq \mathbb{0} \end{aligned}$$

- ▶ z_α : $(1 - \alpha)$ -Quantil Standardnormalverteilung
- ▶ C : Kovarianzmatrix (positiv definit) der normalverteilten R_i
- ▶ \bar{r}_i : Erwartungswerte der R_i

Konvexe Optimierung

Minimierung von

- ▶ konvexen Zielfunktionen

über

- ▶ konvexen (abgeschlossenen) Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$
- ▶ Hier: Differenzierbare Zielfunktionen
- ▶ Oft: $X = \{x \in X_0 \mid g_i(x) \leq 0 \text{ für } i = 1, \dots, m\}$ mit einfacher konvexer Menge X_0 , g_i konvex

Inhalt

- ▶ Optimierung ohne Nebenbedingungen
- ▶ Konvexe Mengen und Kegel
- ▶ Optimalitätsbedingungen für konvexe Optimierungsprobleme
- ▶ Dualität und Konische Optimierung
- ▶ Polynomiale Verfahren für konvexe Optimierung
- ▶ Die Geometrie der Linearen Optimierung
- ▶ Der Simplex-Algorithmus
- ▶ Ganzzahlige und Kombinatorische Optimierung

Literatur. . .

- ▶ R. J. Vanderbei
Linear Programming
Springer, 2001.
- ▶ J. Matousek und B. Gärtner
Using and Understanding Linear Programming
Springer, 2006.
- ▶ V. Chvatal
Linear Programming
Freeman, 1983.
- ▶ D. Bertsimas and J. N. Tsitsiklis
Introduction to Linear Optimization
Athena, 1997

... Literatur

- ▶ G. B. Dantzig
Linear Programming and Extensions
Princeton University Press, 1998 (1963).
- ▶ A. Ruszcynski
Nonlinear Optimization
Princeton University Press, 2006
- ▶ A. Schrijver
Theory of Linear and Integer Programming
Wiley, 1986.
- ▶ M. Grötschel, L. Lovàsz, A. Schrijver
Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization.
Springer, 1988.

Materialien

- ▶ www.math.uni-magdeburg.de/~kaibel/
- ▶ \LaTeX -Folien: Vor VL im Netz
- ▶ Empfehlung: Zur VL mitbringen (Notizen)
- ▶ Handschriftliche Folien: Nach VL im Netz

Organisatorisches

- ▶ Vorlesung
 - ▶ Montag 15:15-16:45 G05-307
 - ▶ Dienstag 15:15-16:45 G05-307
- ▶ Übungen
 - ▶ Verantwortlich: Tobias Weber
 - ▶ Dienstag, 7:30-9:00 (G22A-211)
- ▶ Leistungsnachweis
 - ▶ Klausur (Übung letzte VL-Woche, 24.1.2017)
 - ▶ Teilnahmenvoraussetzungen
 - ▶ Übungspunkte, Vorrechnen
 - ▶ Details in Übungen
- ▶ Modulprüfung
 - ▶ September 2017 (Februar/März 2017)
 - ▶ In der Regel: Gemeinsam mit Numerik