Vorlesung
Einführung in die Mathematische Optimierung

(Wintersemester 2016/17)

Kapitel 2: Konvexe Mengen und Kegel

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 24. Oktober 2016)

Gliederung

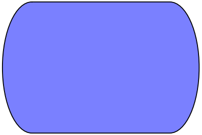
Konvexe Mengen

Definition 2.1

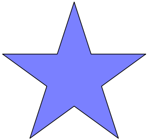
Eine Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für alle $x, y \in X$

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \ \in \ X$$

für alle $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt.



konvex



nicht konvex

- Eine Menge ist genau dann konvex, wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungstrecke enthält.
- Konvexe Mengen sind (weg-)zusammenhängend.

Konvexe Funktionen auf konvexen Mengen

Definition 2.2

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **konvex**/**konkav**, wenn für alle $x, y \in X$ und $0 \leq \lambda \leq 1$

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ \leq \ / \ \geq \ \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

gilt.

Bemerkung 2.3

Nimmt eine konvexe/konkave Funktion auf einer konvexen Menge in einem Punkt ein lokales Minimum/Maximum an, so nimmt sie dort auch ihr globales Minimum/Maximum an.

(Beweis wie Beweis von Bem. 1.8.)

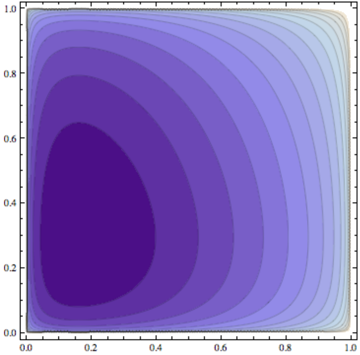
Niveaumengen

Beobachtung 2.4

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex, so ist für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$ *die Menge*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \, : \, f(x) \leq \alpha\}$$

konvex.



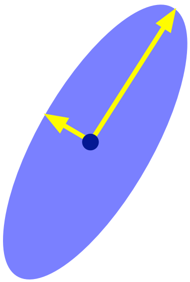
Ellipsoide

Bemerkung 2.5

Für eine positiv definite symmetrische Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *und* $z \in \mathbb{R}^n$ *ist das von* Q *definierte* **Ellipsoid**

$$\mathrm{Ell}(z, Q) := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, (x - z)^\mathsf{T} Q^{-1} (x - z) \leq 1\}$$

mit Zentrum z *konvex (und kompakt).*

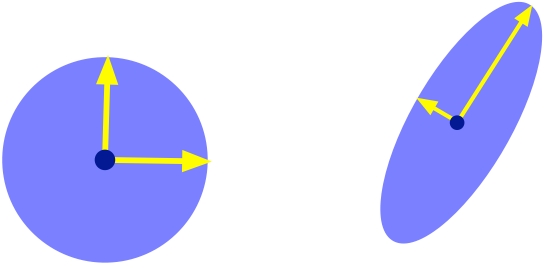


Ellipsoide und Bälle

- Das einfachste Ellipoid ist der **Ball**

$$\mathrm{B}(z,\varrho) := \mathrm{Ell}(\varrho^2 \mathbb{I}_n, z) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| \le \varrho\}$$

  vom Radius $\varrho > 0$ um $z \in \mathbb{R}^n$.
- Spalten von $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$: Mit Quadratwurzeln der Eigenwerte skalierte Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von Q
- Dann ist $\mathrm{Ell}(Q,z) = C \cdot \mathrm{B}(\mathbb{O}_n, 1) + z$ (Spalten von C: Halbachsen von $\mathrm{Ell}(Q,z)$).



Schnitte konvexer Mengen

Beobachtung 2.6

Ist I eine Indexmenge (beliebiger Kardinalität), und sind $X_i \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen ($i \in I$), so ist auch ihre Schnittmenge

$$\bigcap_{i \in I} X_i$$

konvex.

Konvexe Hüllen

Definition 2.7

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$\operatorname{conv} X := \bigcap \{X' \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq X', X' \text{ konvex}\}$$

die **konvexe Hülle** von X.

- **Lineare Hülle**:

$$\operatorname{lin} X := \bigcap \{L \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq L, L \text{ linearer Unterraum}\}$$

- **Affine Hülle**:

$$\operatorname{aff} X := \bigcap \{A \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq A, A \text{ affiner Unterraum}\}$$

Kombinationen

Für $x^{(1)}, \dots, x^{(r)} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ist

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i x^{(i)}$$

eine **lineare Kombination** von $x^{(1)}, \dots, x^{(r)}$.

- Falls $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$: **affine Kombination**
- Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$: **konische Kombination**
- Konische affine Kombinationen: **konvexe Kombinationen**

Bemerkung 2.8

Die konvexe / lineare / affine Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller konvexen /linearen / affinen Kombinationen von (endlich vielen) Punkten aus X.

Halbräume, Hyperebenen

Definition 2.9

Für $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ heißen

$$\mathrm{H}^{\leq}(a, \beta) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a, x \rangle \leq \beta\}$$

und

$$\mathrm{H}^{=}(a, \beta) \;:=\; \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \langle a, x \rangle = \beta\}$$

der von (a, β) definierte (affine) **Halbraum** bzw. die von (a, β) definierte (affine) **Hyperebene** (falls $\beta = 0$: **linear**).

Beobachtung 2.10

- *Halbräume sind konvex (und abgeschlossen).*
- *Hyperebenen sind konvex.*
- *Affine Unterräume sind konvex.*
- *Die Schnittmenge beliebig vieler Halbräume ist konvex.*

Polyeder

Definition 2.11

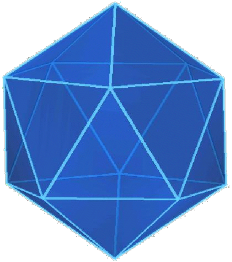
Eine Teilmenge $P \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ein **(konvexes) Polyeder**, wenn P die Schnittmenge *endlich vieler* affiner Halbräume ist.

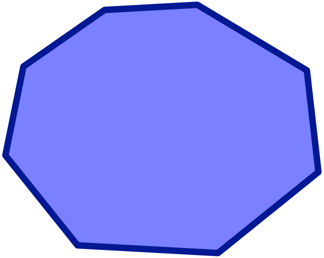
- $P = \varnothing$ und $P = \mathbb{R}^n$ (Schnitt über leerer Indexmenge) sind Polyeder
- Affine Unterräume sind Polyeder.

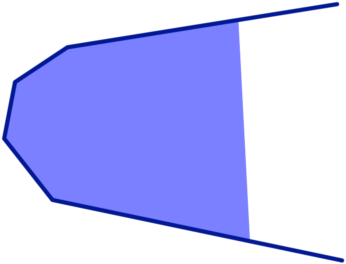
Beobachtung 2.12

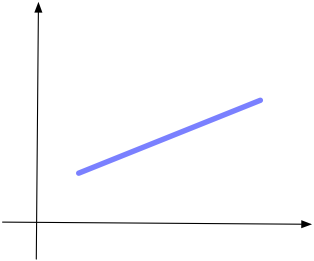
1. *Polyeder sind konvex und (topologisch) abgeschlossen.*
2. *Die Menge* $\mathrm{P}^{\leq}(A, b) := \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; Ax \leq b\}$ *der zulässigen Lösungen eines linearen Optimierungsproblems ist ein Polyeder.*

Polyeder: Beispiele









Minkowski-Summen und Skalierungen

Definition 2.13

Für Mengen $X_1, \dots, X_q \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst

$$\sum_{i=1}^{q} X_i = X_1 + \cdots + X_q := \left\{ \sum_{i=1}^{q} x^{(i)} : x^{(i)} \in X_i \text{ für alle } i \in [q] \right\}$$

die **Minkowski-Summe** von $X_1, \dots, X_q$.

Bemerkung 2.14

Minkowski-Summen und Skalierungen konvexer Mengen sind konvex.

($X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha X := \{\alpha x \mid x \in X\}$ **Skalierung** von X)

Trennsätze für konvexe Mengen

Satz 2.15

Sind $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex und abgeschlossen und* $y \in \mathbb{R}^n \setminus X$, *so gibt es* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *und* $\varepsilon > 0$ *mit* $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle - \varepsilon$ *für alle* $x \in X$.

Bemerkung 2.16

Für jede konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist auch der topologische Abschluss* $\mathrm{cl}(X)$ *von* X *konvex.*

Satz 2.17

Sind $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexe Mengen mit* $X \cap Y = \varnothing$, *so gibt es* $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbb{O}_n\}$ *mit* $\langle a, x\rangle \leq \langle a, y\rangle$ *für alle* $x \in X, y \in Y$.

Schnitte von Halbräumen

Korollar 2.18

Der topologische Abschluss einer konvexen Menge ist der Schnitt aller sie enthaltenden Halbräume.

Bemerkung 2.19

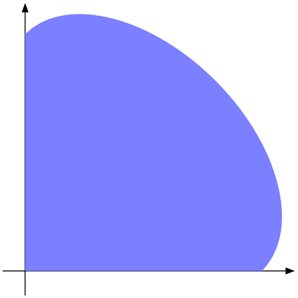
Die Schnittmengen (beliebig vieler) Halbräume sind also genau die abgeschlossenen konvexen Mengen.

(Die Schnittmengen *endlich* vieler Halbräume sind die Polyeder.)

Kegel

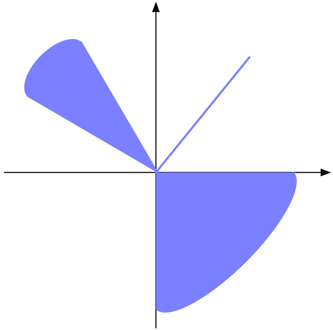
Definition 2.20

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Kegel**, wenn $K \neq \varnothing$ ist und für alle $x \in K$ und $\alpha \geq 0$ auch $\alpha x \in K$ ist.



$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x \geq \mathbb{0}_n\}$

konvexer Kegel



nicht konvexer Kegel

Eigenschaften von Kegeln

Bemerkung 2.21

Ist I *eine Indexmenge (beliebiger Kardinalität), und sind* $K_i \subseteq \mathbb{R}^n$ *Kegel (*$i \in I$*), so ist auch die Schnittmenge* $\bigcap_{i \in I} K_i$ *ein Kegel.*

Bemerkung 2.22

Eine nicht leere Menge $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein konvexer Kegel, wenn* K *alle konischen Kombinationen von Elementen aus* K *enthält.*

Wichtige Kegel

- Der **nicht-negative Orthant**

$$\mathbb{R}^n_+ := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \geq \mathbb{O}_n\}\,.$$

- Der **Kegel der positiv-semidefiniten Matrizen**

$$\mathbb{S}^k_+ := \{A \in \mathbb{S}^k \,|\, A \text{ positiv semidefinit}\}\,,$$

  wobei $\mathbb{S}^k$ der $\frac{k(k+1)}{2}$-dimensionale Unterraum der symmetrischen Matizen in $\mathbb{R}^{k\times k}$ ist.
- $\mathbb{R}^n_+$ und $\mathbb{S}^k_+$ sind konvex und abgeschlossen.

Trennsatz für konvexe Kegel

Satz 2.23

Sind $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener konvexer Kegel und $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ ein Punkt außerhalb von K, so gibt es $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\langle a, x \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } x \in K \quad \text{und} \quad \langle a, y \rangle = 1 \,.$$

Konische Hüllen

Definition 2.24

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die **konische Hülle** von X

$$\operatorname{cone} X := \bigcap \{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq K, K \text{ Kegel}\}.$$

Bemerkung 2.25

$$\operatorname{cone} X = \{\alpha x \mid x \in X, \alpha \geq 0\} \cup \{\mathbb{O}_n\}$$

Bemerkung 2.26

- *Für alle $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{cone} X$ ein Kegel.*
- *Für konvexe Mengen X ist $\operatorname{cone} X$ ein konvexer Kegel.*

Konvex-konische Hüllen

Definition 2.27

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist

$$\operatorname{ccone} X := \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n \mid X \subseteq K, K \text{ konvexer Kegel}\}$$

die **konvex-konische Hülle** von X.

Bemerkung 2.28

Für alle $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\operatorname{ccone} X$ ...

- *... ein konvexer Kegel.*
- *... die Menge aller konischen Kombinationen von Elementen aus X.*

Endlich erzeugte Kegel

Definition 2.29

Ein Kegel ist **endlich erzeugt**, wenn er

$$\operatorname{ccone} X = \Big\{ \sum_{x \in X} \lambda_x x \;\Big|\; \lambda_x \geq 0 \text{ für alle } x \in X \Big\}$$

für eine *endliche* Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist.
Ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sogar linear unabhängig, so heißt $\operatorname{ccone} X$ ein **simplizialer** Kegel.

Bemerkung 2.30

Endlich erzeugte Kegel sind konvex.

Satz von Carathéodory

Satz 2.31

Sind $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $x \in \operatorname{ccone} X$, *so gibt es eine linear unabhängige Teilmenge* $\tilde{X} \subseteq X$ *von* X *mit* $x \in \operatorname{ccone} \tilde{X}$ *(insbesondere:* $|\tilde{X}| \leq n$*).*

Satz 2.32

Endlich erzeugte Kegel sind konvex und abgeschlossen.

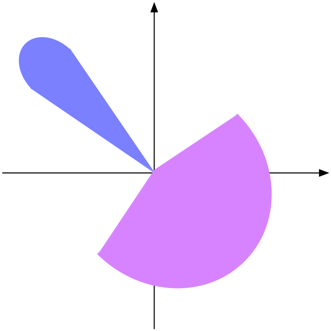
Polare von Kegeln

Definition 2.33

Für einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

$$K^\circ \; := \; \{y \in \mathbb{R}^n \, : \, \langle y, x\rangle \leq 0 \text{ für alle } x \in K\}$$

der zu K **polare Kegel**.



Eigenschaften von Polaren

Bemerkung 2.34

Für zwei Kegel $K_1 \subseteq K_2$ *gilt* $K_1{}^\circ \supseteq K_2{}^\circ$.

Bemerkung 2.35

Für einen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist* $\mathrm{cl}(K)$ *ein Kegel mit* $K^\circ = (\mathrm{cl}(K))^\circ$.

Bemerkung 2.36

Die Polaren von Kegeln sind konvexe abgeschlossene Kegel.

Bemerkung 2.37

Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist* $(\operatorname{ccone} X)^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y\rangle \leq 0 \textit{ für alle } x \in X\}$.

Satz 2.38

Für jeden abgeschlossenen konvexen Kegel K *gilt* $K^{\circ\circ} = K$.

Polare von Schnitten

Satz 2.39

Sind $K_1, \ldots, K_q \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvexe Kegel mit*

$$K_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{q} \operatorname{int}(K_i) \right) \neq \varnothing \,, \tag{1}$$

so ist

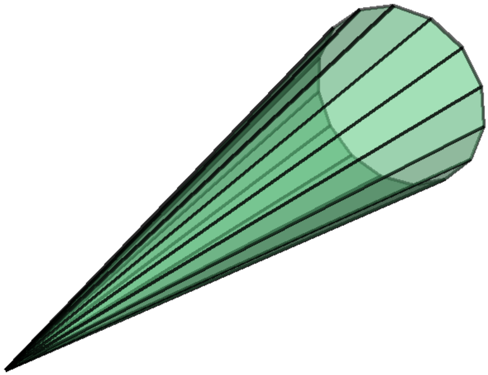
$$\left(\bigcap_{i=1}^{q} K_i \right)^{\circ} = \sum_{i=1}^{q} K_i^{\circ} \,. \tag{2}$$

($\operatorname{int}(X)$: Menge der inneren Punkte von $X \subseteq \mathbb{R}^n$)

Polyederische Kegel

Definition 2.40

Ein **polyedrischer Kegel** ist ein Kegel, der ein Polyeder ist.



Eigenschaften polyedrischer Kegel, Beispiele

Bemerkung 2.41

Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann ein polyedrischer Kegel, wenn es eine Matrix* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *gibt mit* $K = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_n)$.

Bemerkung 2.42

Polyedrische Kegel sind konvex und abgeschlossen.

Bemerkung 2.43

Die Polaren von endlich erzeugten Kegeln sind polyedrische Kegel.

Polare von polyedrischen Kegeln

Satz 2.44

Für den polaren Kegel eines polyedrische Kegels $K = \mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}_m)$ *(mit* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$*) gilt*

$$K^\circ = \operatorname{ccone}\{A_{1,\star}, \dots, A_{m,\star}\}.$$

Insbesondere: Die Polaren von polyedrischen Kegeln sind endlich erzeugt.

Korollar 2.45

Sind $K_1, \dots, K_q \subseteq \mathbb{R}^n$ *polyedrische Kegel, so ist*

$$\left(\bigcap_{i=1}^{q} K_i\right)^\circ = \sum_{i=1}^{q} K_i{}^\circ.$$

Farkas-Lemma

Lemma 2.46

Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$ *so, dass* $\mathrm{P}^{\leq}(A,b) = \varnothing$ *gilt, so gibt es*
$$\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \quad \textit{mit} \quad \lambda^{\mathsf{T}} A = \mathbb{O}_n^{\mathsf{T}} \ \textit{und}\ \langle \lambda, b\rangle = -1.$$

Satz 2.47

Für alle $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $b \in \mathbb{R}^m$ *gilt: Entweder ist*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\} \neq \varnothing$$

oder es ist

$$\{y \in \mathbb{R}^m \,|\, A^{\mathsf{T}} y = \mathbb{O}_n, \langle b, y\rangle = -1, y \geq \mathbb{O}_m\} \neq \varnothing$$

(aber nicht beides).

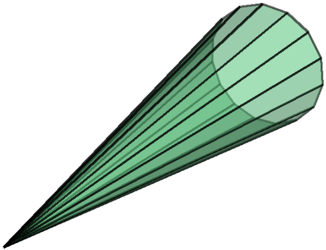
Polyedrische vs. endlich erzeugte Kegel

Lemma 2.48

Jeder polyedrische Kegel ist endlich erzeugt.

Satz 2.49

Ein Kegel ist genau dann polyedrisch, wenn er endlich erzeugt ist.



Verstärkung von Lemma 2.48

Definition

Für jede Matrix $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

- $\delta(M) = \{\det M_{I \times J} \mid I \subseteq [m], J \subseteq [n], |I| = |J|\} \cup \{0, 1\}$
- $\Delta(M) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \delta(M) \cup (-\delta(M)), q \neq 0\}$

Lemma 2.48*

Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt es $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit

$$\mathrm{P}^{\leq}(A, \mathbb{O}) = \mathrm{ccone}(X)\,.$$

Für den Beweis von Lemma 2.48*

Per Induktion nach $p = 0, 1, \ldots$:

Für alle $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ und $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ (mit $p + q \geq 1$, $n \geq 1$) und $A = \binom{B}{C} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times n}$, existiert $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq \mathbb{O}_p, Cx = \mathbb{O}_q\} = \operatorname{ccone} X\,.$$

Lemma 2.48a

Seien $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ (mit $p + q \geq 1$, $n \geq 1$), $A = \binom{B}{C} \in \mathbb{R}^{(p+q) \times n}$ und $K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq \mathbb{O}_p, Cx = \mathbb{O}_q\}$.

1. Falls $\dim(\ker(A)) \geq \dim(\ker(C)) - 1$:
   Es gibt $X \subseteq \Delta(A)^n$, $|X| < \infty$ mit $K = \operatorname{ccone} X$.
2. Andernfalls: Es gibt $z \in \ker(C)$ mit $z \notin K$, $-z \notin K$.

Illustration 1 des Beweises von Lemma 2.48a

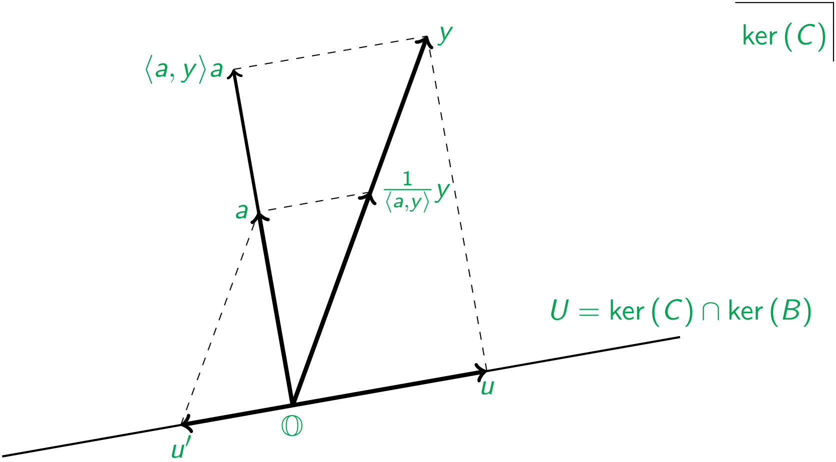


Illustration 2 des Beweises von Lemma 2.48a

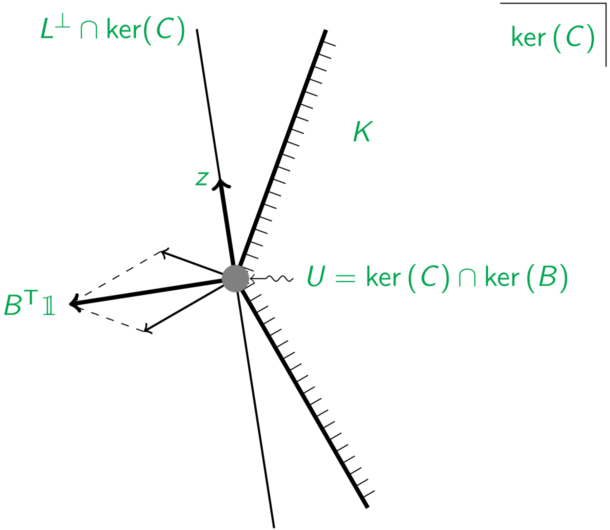


Illustration des Induktionsschritts (Beweis Lemma 2.48*)