Vorlesung
Einführung in die Mathematische Optimierung
(Wintersemester 2016/17)

Kapitel 3: Optimalitätsbedingungen für konvexe Optimierungsprobleme

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 10. November 2016)

Gliederung

Konvexe Optimierungsprobleme

Radial- und Normalenkegel

Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen

Verallgemeinerungen

Das Setup

- Konvexes Optimierungsproblem:

$$\min\{f(x) \,:\, x \in X\}$$

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare konvexe Zielfunktion
- Zulässige Lösungen:

$$X = \left\{x \in X^{(0)} \,:\, \begin{array}{ll} g^{(i)}(x) \leq 0 & \text{für alle } i \in [m] \\ h^{(i)}(x) = 0 & \text{für alle } i \in [p] \end{array} \right\}$$

- $X^{(0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossene konvexe Menge (einfache Struktur)
- $g^{(1)}, \ldots, g^{(m)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare konvexe Funktionen
- $h^{(1)}, \ldots, h^{(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affine Funktionen
- Also: X abgeschlossene konvexe Menge

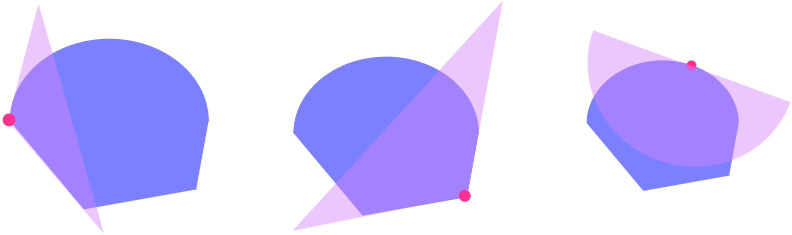
Radialkegel

Definition 3.1

Für eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x^\star \in X$ heißt

$$\mathrm{K}_{x^\star}(X) \;:=\; \mathrm{cone}(X - \{x^\star\})$$

der **Radialkegel** (**Kegel der zulässigen Richtungen**) von X in x.



Beobachtung 3.2

Ist $x^\star$ ein innerer Punkt von X, so gilt $\mathrm{K}_{x^\star}(X) = \mathbb{R}^n$.

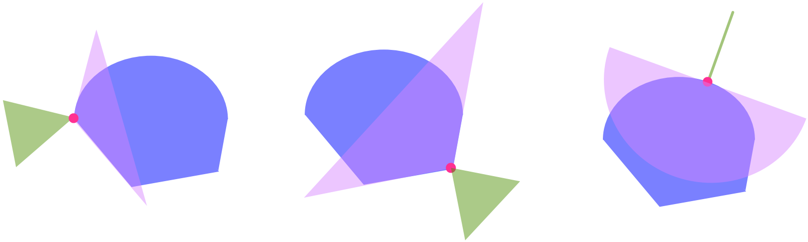
Normalenkegel

Definition 3.3

Für eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in X$ heißt

$$\mathrm{N}_{x^\star}(X) \;:=\; \mathrm{K}_{x^\star}(X)^\circ$$

der **Normalenkegel** von X in $x^\star$.



Beobachtung 3.4

Ist $x^\star$ ein innerer Punkt von X, so gilt $\mathrm{N}_{x^\star}(X) = \{\mathbb{O}_n\}$.

Radial- und Normalenkegel an Polyeder

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax^\star \leq b$:

$$\mathrm{Eq}_{Ax \leq b}(x^\star) := \{i \in [m] \,|\, \langle A_{i,\star}, x^\star \rangle = b_i\} \subseteq [m]$$

Bemerkung 3.5

Für $x^\star \in \mathrm{P}^{\leq}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, Ax \leq b\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{x^\star}(\mathrm{P}^{\leq}(A, b)) &= \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \langle A_{i,\star}, y \rangle \leq 0 \text{ für alle } i \in \mathrm{Eq}_{Ax \leq b}(x^\star)\} \\ \mathrm{N}_{x^\star}(\mathrm{P}^{\leq}(A, b)) &= \mathrm{ccone}\{A_{i,\star} \,|\, i \in \mathrm{Eq}_{Ax \leq b}(x^\star)\} \end{aligned}$$

Insbesondere sind also Radial- und Normalenkegel an Polyeder polyedrisch.

Differenzierbare Optimierung über konvexen Mengen

Satz 3.6

Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion auf einer konvexen Mengen $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

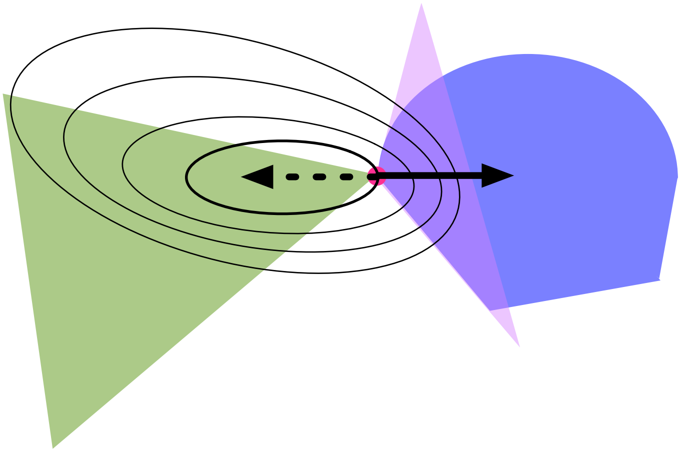
1. *Nimmt f in $x^\star \in X$ ein lokales Minimum über X an, so ist*

$$-\operatorname{grad}_{x^\star} f \in \mathrm{N}_{x^\star}(X)\,.$$

2. *Ist f konvex und gilt $-\operatorname{grad}_{x^\star} f \in \mathrm{N}_{x^\star}(X)$, so gilt*

$$f(x^\star) = \min\{f(x) \,|\, x \in X\}\,.$$

Differenzierbare Optimierung über konvexen Mengen



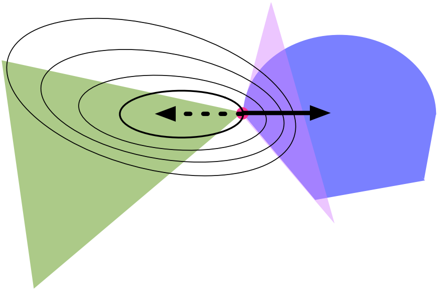
Satz 3.6 für konvexe Zielfunktionen

Korollar 3.7

Die differenzierbare konvexe Funktion f nimmt in $x^\star \in X$ genau dann ihr (globales) Minimum über der konvexen Menge X an, wenn

$$-\operatorname{grad}_{x^\star} f \;\in\; \mathrm{N}_{x^\star}(X)$$

gilt.



Einige Normalenkegel

Lemma 3.8

Für konvexe Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *und* $x^\star \in K$ *ist*

$$\mathrm{N}_{x^\star}(K) = \{y \in K^\circ \mid \langle x^\star, y\rangle = 0\}.$$

Bemerkung 3.9

1. *Für alle* $x^\star \in \mathbb{R}^n_+$ *ist*
$$\mathrm{N}_{x^\star}(\mathbb{R}^n_+) = \{y \in \mathbb{R}^n_- \mid y_i = 0 \text{ für alle } i \in [n] \text{ mit } x^\star_i > 0\}.$$
2. *Für alle* $X^\star \in \mathbb{S}^k_+$ *ist*
$$\mathrm{N}_{X^\star}(\mathbb{S}^k_+) = \{Y \in \mathbb{S}^k_- \mid \langle X^\star, Y\rangle = 0\}.$$

Bemerkung 3.10

Für konvexe Kegel $K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in [r])$ *und* $(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}) \in K_1 \times \cdots \times K_r$ *gilt*

$$\mathrm{N}_{(x^{(1)},\dots,x^{(r)})}(K_1 \times \cdots \times K_r) = \mathrm{N}_{x^{(1)}}(K_1) \times \cdots \times \mathrm{N}_{x^{(r)}}(K_r).$$

Das Setup

$(X_0, (g_i)_{i\in[m]}, (h_i)_{i\in[p]})$ (für $m, p \geq 0$) erfülle:

- $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex
- $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar (für $i \in [m]$).
- $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin (für $i \in [p]$).

Menge der zulässigen Lösungen:

$$X = \{x \in X_0 \mid g_i(x) \leq 0 \text{ für alle } i \in [m], h_i(x) = 0 \text{ für alle } i \in [p]\}$$

Mit $G_i := g_i^{-1}(\mathbb{R}_-) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $H_i := h_i^{-1}(\{0\}) \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$X = X_0 \cap \bigcap_{i\in[m]} G_i \cap \bigcap_{i\in[p]} H_i$$

Der Normalenkegel für reguläre Tripel

Lemma 3.11

Falls $(X_0, (g_i)_{i\in[m]}, (h_i)_{i\in[p]})$ *regulär ist:*

$$\mathrm{N}_{x^\star}(X) = \mathrm{N}_{x^\star}(X_0) + \sum_{i\in[m]} \mathrm{N}_{x^\star}(G_i) + \sum_{i\in[p]} \mathrm{N}_{x^\star}(H_i)$$

$(X_0, (g_i)_{i\in[m]}, (h_i)_{i\in[p]})$ **regulär**, falls:

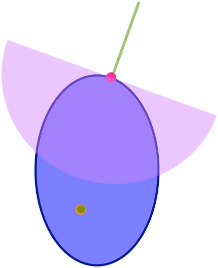
1. Die Menge X_0 ist ein Polyeder und die Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ sind affin oder
2. Die Menge $X \cap \mathrm{int}(X_0)$ ist nicht leer, und die Funktionen $g_1, \ldots, g_m$ sind affin oder
3. Es gibt ein $x^{(s)} \in X$ mit $x^{(s)} \in \mathrm{int}(X_0)$ falls $p \neq 0$, für das $g_i(x^{(s)}) < 0$ für alle $i \in [m]$ gilt (**Slater-Bedingung**).

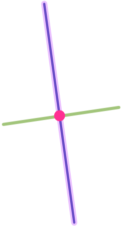
Eine differenzierbare konvexe Nebenbedingung

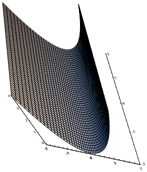
Satz 3.12

Ist $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *differenzierbar und konvex und gibt es ein* $x^{(s)} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $g(x^{(s)}) < 0$*, so ist für alle* $x^\star \in \mathbb{R}^n$ *mit* $g(x^\star) \leq 0$

$$\mathrm{N}_{x^\star}(g^{-1}(\mathbb{R}_-)) \;=\; \begin{cases} \operatorname{cone}\{\operatorname{grad}_{x^\star} g\} & \textit{falls } g(x^\star) = 0 \\ \{\mathbb{O}_n\} & \textit{falls } g(x^\star) < 0 \end{cases} .$$







Karush-Kuhn-Tucker (differenzierbar, konvex) ...

Voraussetzungen:

- $f, g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar
- $h_1, \ldots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin
- $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex
- $(X_0, (g_i)_{i \in [m]}, (h_i)_{i \in [p]})$ reguläres Tripel
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei die Menge aller $x \in X_0$ mit
  - $g_i(x) \leq 0$ für alle $i \in [m]$ und
  - $h_i(x) = 0$ für alle $i \in [p]$.

…Karush-Kuhn-Tucker (differenzierbar, konvex)

Satz 3.13

Ein Punkt $x^\star \in X$ *ist genau dann Optimallösung von*

$$\min\{f(x) \mid x \in X\}\,,$$

wenn es Multiplizierer $\lambda_1, \dots \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ *und* $\mu_1, \dots, \mu_p \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\operatorname{grad}_{x^\star} f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_{x^\star} g_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \operatorname{grad}_{x^\star} h_i \in -\operatorname{N}_{x^\star}(X_0) \qquad (1)$$

und

$$\lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i \in [m] \text{ mit } g_i(x^\star) < 0 \qquad (2)$$

gibt.

KKT für LP (1. Variante)

Satz 3.14 (Satz vom komplementären Schlupf I)

Seien $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $b \in \mathbb{R}^p$ *und* $c \in \mathbb{R}^n$. *Ein Punkt* $x^\star \in \mathbb{R}^n_+$ *mit* $Ax^\star = b$ *ist genau dann Optimallösung von*

$$\min\{\langle c, x\rangle \mid Ax = b, x \in \mathbb{R}^n_+\}\,,$$

wenn es $\mu \in \mathbb{R}^p$ *gibt mit* $\mu^\mathsf{T} A \leq c^\mathsf{T}$ *und*

$$\mu^\mathsf{T} A_{\star,j} = c_j \quad \textit{für alle } j \in [n] \textit{ mit } x_j^\star > 0\,.$$

KKT für LP (2. Variante)

Satz 3.15 (Satz vom komplementären Schlupf II)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Ein Punkt $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax^\star \leq b$ ist genau dann Optimallösung von

$$\max\{\langle c, x\rangle \mid Ax \leq b, x \in \mathbb{R}^n\},$$

wenn es einen Vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ gibt mit $\lambda^\mathsf{T} A = c^\mathsf{T}$ und

$$\lambda_i = 0 \quad \text{für alle } i \in [m] \text{ mit } \langle A_{i,\star}, x^\star\rangle < b_i\,.$$

KKT für SDP

Satz 3.16

Seien $A^{(1)}, \dots, A^{(p)} \in \mathbb{S}^k$, $b \in \mathbb{R}^k$ *und* $C \in \mathbb{R}^{k \times k}$, *und gebe es eine positiv definite symmetrische Matrix* $X^{(s)} \in \mathbb{S}^k$ *mit* $\langle A^{(i)}, X^{(s)} \rangle = b_i$ *für alle* $i \in [p]$.

Eine Matrix $X^\star \in \mathbb{S}^k_+$ *mit* $\langle A^{(i)}, X^\star \rangle = b_i$ *für alle* $i \in [p]$ *ist genau dann Optimallösung von*

$$\min\{\langle C, X\rangle \mid \langle A^{(i)}, X\rangle = b_i \text{ für alle } i \in [p], X \in \mathbb{S}^k_+\},$$

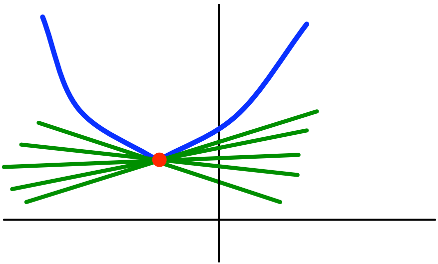
wenn es einen Vektor $\mu \in \mathbb{R}^p$ *gibt mit*

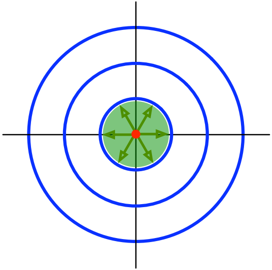
$$Y := C - \sum_{i=1}^{p} \mu_i A^{(i)} \in \mathbb{S}^k_+ \quad \text{und} \quad \langle X^\star, Y \rangle = 0\,.$$

Konvexe nicht-differenzierbare Probleme

- Sind $f, g^{(1)}, \dots, g^{(m)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwar konvex, aber (vielleicht) nicht differenzierbar, so gilt ein mit Hilfe von *Subgradienten* formulierbares Analogon von Satz 3.17.
- Z.B.: [Ruszczyński, Thm. 3.34]
- $y \in \mathbb{R}^n$ *Subgradient* von f in $x^\star \in \mathbb{R}^n$ (d.h. $y \in \mathrm{SGRAD}_{x^\star}(f)$):

$$f(x) \;\geq\; f(x^\star) + \langle y, x - x^\star \rangle \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$





Karush-Kuhn-Tucker (konvex) ...

Voraussetzungen:

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex
- $g_1, \ldots, g_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex
- $h_1, \ldots, h_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ affin
- $X_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex
- $(X_0, (g_i)_{i \in [m]}, (h_i)_{i \in [p]})$ reguläres Tripel
- $X \subseteq \mathbb{R}^n$ sei die Menge aller $x \in X_0$ mit
  - $g_i(x) \leq 0$ für alle $i \in [m]$ und
  - $h_i(x) = 0$ für alle $i \in [p]$.
- f stetig in wenigstens einem Punkt von X

... Karush-Kuhn-Tucker (konvex)

Satz 3.17

Ein Punkt $x^\star \in X$ *ist genau dann Optimallösung von*

$$\min\{f(x) \,|\, x \in X\}\,,$$

wenn es Multiplizierer $\lambda_1, \ldots \lambda_m \in \mathbb{R}_+$ *und* $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{R}$ *mit*

$$\Big(\mathrm{SGRAD}_{x^\star}(f) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \,\mathrm{SGRAD}_{x^\star}(g_i) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \,\mathrm{grad}_{x^\star} h_i\Big) \cap (-\,\mathrm{N}_{x^\star}(X_0)) \neq \varnothing$$

und

$$\lambda_i = 0 \quad \textit{für alle } i \in [m] \textit{ mit } g_i(x^\star) < 0$$

gibt.

Differenzierbare nicht-konvexe Probleme

- Sind $f, g^{(1)}, \dots, g^{(m)}, h^{(1)}, \dots, h^{(p)} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zwar stetig differenzierbar, aber (vielleicht) nicht konvex, so sind (unter geeigneten Regularitätsbedingungen) die KKT-Bedingungen in Satz 3.17 *notwendig* für das Vorliegen eines lokalen Minimums.
- Z.B.: [Ruszczyński, Thm. 3.25]
- Herleitung: *Tangentialkegel* statt Radialkegel