$\boxed{\text{EMO } 6.12.16}$

$$\alpha(G) := \max\{|S| : S \subseteq V \text{ stabil}\}$$

$$\rho := \rho(G) := \min\left\{\langle \mathbb{1}, y\rangle : \sum_{\substack{k \in \Omega(G):\\ v \in k}} y_k = 1 \ \forall v \in V,\ y \in \mathbb{R}_+^{\Omega(G)}\right\} \quad (2)$$

$$\vartheta := \vartheta(G) := \max\left\{\langle \mathbb{1}, X\rangle : \operatorname{Spur}(X) = 1,\ X_{vu} = 0 \ \forall \{v,u\} \in E,\ X \in \mathcal{S}_+^V\right\} \quad (4)$$

effizient berechenbar

$\alpha(G) \leq \rho(G)$ ← NP-schwer

$\alpha(G) \leq \vartheta(G)$

- Sind y^* und X^* Optimallösungen von (2) bzw. (4), so gilt:

$$0 \leq \underbrace{\sum_{k \in \Omega(G)} y_k^* (\rho \cdot \chi(k) - \mathbb{1}_v)^T X^* \cdot (\rho \cdot \chi(k) - \mathbb{1}_v)}_{= \ldots = \rho(\rho - \vartheta)}$$

$\Rightarrow \boxed{\vartheta \leq \rho}$

Beweis von Satz 5.1

- Sei $P = P^{\leq}(A, b)$ ein Polyeder ($A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$)
- $K := \{(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : Ax - x_{n+1} b \leq 0, x_{n+1} \geq 0\}$

  ist ein polyedrischer Kegel
- Satz 2.45 $\Longrightarrow$ Es gibt $X \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, $|X| < \infty$

  mit $K = \mathrm{ccone}(X)$.

- Wegen $x_{n+1} \geq 0$ für alle $(x, x_{n+1}) \in X$ können wir per Skalierung erreichen, dass $x_{n+1} = 1$ für alle $(x, x_{n+1}) \in X$ mit $x_{n+1} \neq 0$ ist.

- Mit $V := \{v \in \mathbb{R}^n : (v, 1) \in X\}$

  $U := \{u \in \mathbb{R}^n : (u, 0) \in X\}$:

$$K = \mathrm{ccone}(V \times \{1\}) + \mathrm{ccone}(U \times \{0\})$$

- Wegen $P = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,1) \in K\}$

also wegen

$$K = \operatorname{ccone}(V \times \{1\}) + \operatorname{ccone}(U \times \{0\})$$

$$P = \operatorname{conv}(V) + \operatorname{ccone}(U).$$

- Sei umgekehrt $\tilde{P} = \operatorname{conv}(\tilde{V}) + \operatorname{ccone}(\tilde{U})$ mit $\tilde{V}, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $|\tilde{V}|, |\tilde{U}| < \infty$.

- $\tilde{K} := \operatorname{ccone}(\tilde{V} \times \{1\}) + \operatorname{ccone}(\tilde{U} \times \{0\})$

ist ein endlich erzeugter Kegel.

- Satz 2.45 $\Longrightarrow$ Es gibt $M \in \mathbb{R}^{\tilde{m} \times (n+1)}$ mit

$$\tilde{K} = P^{\leq}(M, 0_{\tilde{m}})$$

- $\tilde{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,1) \in \tilde{K}\}$

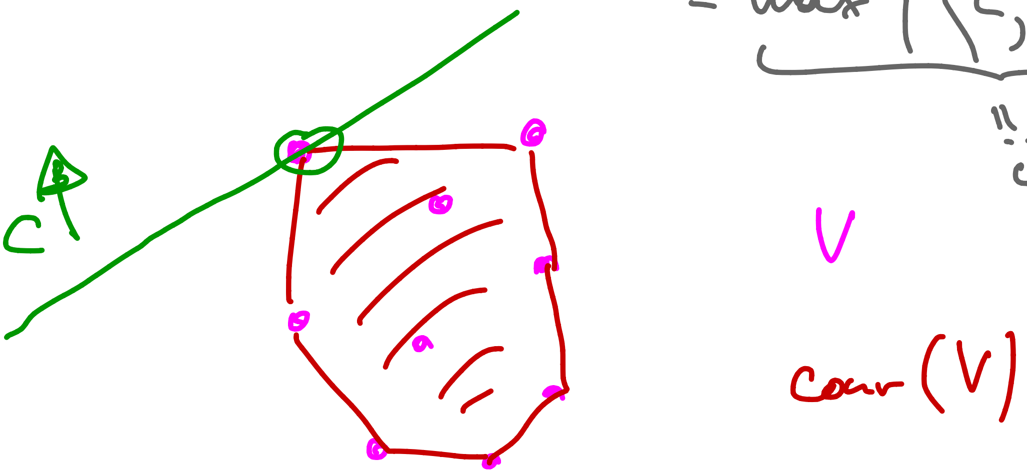
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{M_{*,[n]} \cdot x + M_{*,n+1} \cdot 1 \leq 0_{\tilde{m}}}\}$$

mit $\tilde{A} = M_{*,[n]}$, $\tilde{b} = -M_{*,n+1}$ $\Longleftrightarrow$ $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$

Beobachtung

Ist $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $0 < |V| < \infty$, so gilt für alle $c \in \mathbb{R}^n$:

$$\max\{\langle c,x\rangle : x \in \mathrm{conv}(V)\} = \underbrace{\max\{\langle c,v\rangle : v \in V\}}_{=:\,\omega}$$



["$\geq$": ✓

"$\leq$": Für alle $\lambda \in \mathbb{R}_+^V$ mit $\sum_{v \in V} \lambda_v = 1$ gilt

$$\left\langle c, \sum_{v\in V} \lambda_v \cdot v \right\rangle = \sum_{v \in V} \underbrace{\lambda_v}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\langle c, v\rangle}_{\leq \omega}$$

$$\leq \underbrace{\left(\sum_{v \in V} \lambda_v\right)}_{1} \omega = \omega$$]

Beweis zu Anm. 5.4

- Wegen $0 \in \operatorname{ccone}(\mathcal{U})$ $\forall\, \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist
  $P = \emptyset \iff V = \emptyset$

- Sei also $V \neq \emptyset$.

- Es gilt $\sup\{\langle c, x\rangle : x \in P\}$

$$= \underbrace{\sup\{\langle c, x\rangle : x \in \operatorname{conv}(V)\}}_{\overset{[\text{Bem.}]}{=} \max\{\langle c, v\rangle : v \in V\}} + \underbrace{\sup\{\langle c, x\rangle : x \in \operatorname{ccone}(\mathcal{U})\}}_{\begin{cases} 0, & \text{falls } \langle c, u\rangle \leq 0 \ \forall u \in \mathcal{U} \\ +\infty, & \text{sonst} \end{cases}}$$