$\boxed{\text{EMO } 07.11.16}$

$$K = \operatorname{ccone}(X), \quad X \subseteq \mathbb{R}^n, \quad |X| < \infty$$

$$K^\circ = \{ y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 0 \ \forall x \in X \} \leftarrow \text{Polyeder}$$

<u>Beweis Satz 2.44</u>

- Sei $\tilde{K} := \operatorname{ccone}\{A_{1,*}, \dots, A_{m,*}\}$
- $\tilde{K}^\circ \underset{\text{Bem. 2.37}}{=} P^{\leq}(A, 0) = K$

$$\Longrightarrow \quad K^\circ = \tilde{K}^{\circ\circ} \underset{\substack{\text{Satz 2.32}\\ \text{Satz 2.38}}}{=} \tilde{K}$$

$\boxtimes$

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^m_+ \setminus 0$, dass $\lambda^T A = 0^T$, $\lambda^T b = -1$

<u>Wäre</u> für ein $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

$$A\bar{x} \leq b \qquad \Big| \ \lambda^T \cdot (\dots)$$

$$\underset{(\lambda \geq 0)}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{\underbrace{(\lambda^T A)}_{0^T} \bar{x}}_{0} \leq \underbrace{\lambda^T b}_{-1} \qquad \lightning$$

Lineare Algebra:

$Ax \overset{\leq}{=} b$ ist genau dann unlösbar, wenn $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ existiert mit

$$\lambda^T A = 0^T, \quad \lambda^T b \underset{=-1}{\neq} 0.$$

Beweis zu Lemma 2.46

- $\bar{A} := [A \ \ -b] \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$
- $P^{\leq}(A,b) = \emptyset \Longrightarrow P^{\leq}(\bar{A},0) \subseteq \underbrace{H^{\leq}(e_{n+1},0)}_{=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1}\leq 0\}}$

[Angenommen, $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ erfülle $\bar{A}x \leq 0$, aber nicht $x_{n+1} \leq 0$

$$\Longrightarrow \quad A\cdot x_{[n]} - x_{n+1}\cdot b \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad A\cdot x_{[n]} \leq x_{n+1}\cdot b \qquad \Big|\cdot \frac{1}{x_{n+1}} \quad [x_{n+1} > 0]$$

$$\Longrightarrow \quad A\cdot\left(\frac{1}{x_{n+1}}\cdot x_{[n]}\right) \leq b$$

]

$$\Longrightarrow \quad e_{n+1} \in \underbrace{\left(P^{\leq}(\bar{A}, \mathbb{0})\right)^{\circ}}_{\text{ccone}\{\text{Zeilen von } \bar{A}\}}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \quad \underbrace{e_{n+1} = \lambda^T \cdot \bar{A} = \lambda^T [A, -b]}_{\Downarrow}$$

$$\lambda^T A = \mathbb{0}^T_{[n]}, \quad \underbrace{\lambda^T(-b) = 1}_{\Downarrow}$$

$$\lambda^T b = -1$$

$\square$

<u>Beweis zu Satz 2.49</u>

(Unter Verwendung von Lem. 2.48)

- Zu zeigen ist: Jeder endlich erzeugte Kegel ist polyedrisch.

- K endlich erzeugt

$$\underset{\text{Bem. 2.43}}{\Longrightarrow} K^\circ \text{ polyedrisch}$$

$$\underset{\text{Lem. 2.48}}{\Longrightarrow} K^\circ \text{ endlich erzeugt}$$

$$\underset{\text{Bem. 2.43}}{\Longrightarrow} \underbrace{K^{\circ\circ}}_{\substack{\| \text{ Satz 2.38, 2.32} \\ K}} \text{ polyedrisch}$$

$\square$

Bemerkungen zu $\Delta(M)$

- $M \in \mathbb{Q}^{m\times n} \Longrightarrow \Delta(M) \subseteq \mathbb{Q}$

- Kodierungslängen

  Für $a \in \mathbb{Q}$: Schreibe $a = \frac{p}{q}$ mit

  $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ teilerfremd

  $$\langle a\rangle := 1 + \lceil \log_2(|p|+1)\rceil + \lceil \log_2(q+1)\rceil$$

Für $v \in \mathbb{Q}^n$: $\langle v \rangle := n + \sum_{i=1}^{n} \langle v_i \rangle$

Für $M \in \mathbb{Q}^{m \times n}$: $\langle M \rangle := mn + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle M_{ij} \rangle$

- ÜBUNGEN

$\max \{ \langle z \rangle : z \in \Delta(M) \}$ ist polynomial beschränkt in $\langle M \rangle$ für alle rationalen Matrizen $\langle M \rangle$.