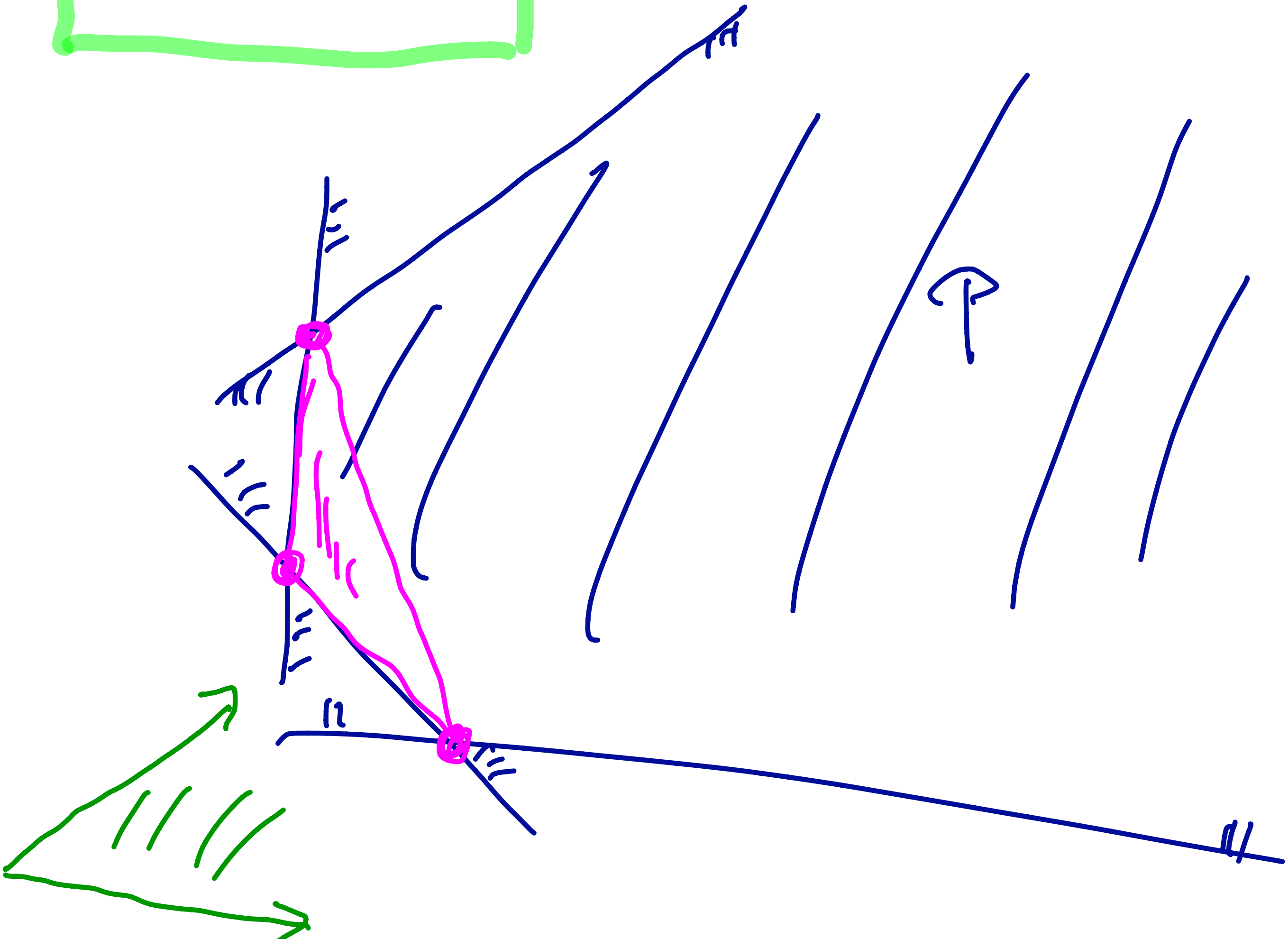
EMO 12.12.16



$$\mathrm{conv}(V) + \mathrm{ccone}(U)$$

Beweis zu Satz 5.8

Es genügt, für jedes $x^* \in P$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
\mathrm{char}(P) &\underset{(1)}{\subseteq} \{ y \in \mathbb{R}^n : x^* + \mathrm{cone}\{y\} \subseteq P \} \\
&\underset{(2)}{\subseteq} P^{\leq}(A, 0) \\
&\underset{(3)}{\subseteq} K \\
&\underset{(4)}{\subseteq} \mathrm{char}(P)
\end{aligned}$$

Zu (1): Sei $y \in \operatorname{char}(P)$, $\lambda \geq 0$. Dann sind per Induktion

$$x^*, x^*+y, x^*+2y, \dots, x^*+\lceil\lambda\rceil y \in P,$$

also $x^* + \lambda y \in \operatorname{conv}\{x^*, x^*+\lceil\lambda\rceil y\} \subseteq P$, da P konvex.

Zu (2): Sei $y \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x^* + \operatorname{cone}\{y\} \subseteq P$ ist, also für alle $\lambda \geq 0$:

$$b \geq A \cdot (x^* + \lambda y) = Ax^* + \lambda \cdot Ay$$

folglich $Ay \leq \mathbb{O}$.

Zu (3): Angenommen, es gäbe $y \in \mathbb{R}^n$ mit $Ay \leq \mathbb{O}$ und $y \notin K$. Da K abgeschlossener, konvexer Kegel (sogar polyedrisch) ist, ex. nach Satz 2.23 ein $a \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle a, y\rangle = 1$, $\langle a, z\rangle \leq 0 \; \forall z \in K$.

Wähle $x^* \in P = P^{\leq}(A,b)$ $(\neq \emptyset)$.
Dann gilt für alle $\lambda \geq 0$:

$$A(x^* + \lambda y) = \underbrace{Ax^*}_{\leq b} + \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \cdot \underbrace{Ay}_{\leq 0} \leq b$$

$\Longrightarrow$ $x^* + \lambda y \in P$ und

$$\langle a, x^* + \lambda y \rangle = \langle a, x^* \rangle + \lambda \cdot \underbrace{\langle a, y \rangle}_{1} \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} \infty$$

im Widerspruch zu

$$\sup \{ \langle a, x \rangle : x \in \underbrace{P}_{Q+K} \} =$$

$$\sup \{ \langle a, q \rangle : q \in Q \} + \sup \{ \underbrace{\langle a, k \rangle}_{\leq 0} : k \in K \} < \infty$$

kompakt

Zu (4): Seien $y \in K$ und $x \in P = Q + K$;
dann gibt es also $q \in Q$, $k \in K$ mit
$x = q + k$, also $x + y = q + \underbrace{(k + y)}_{\in K} \in \underbrace{Q + K}_{= P}$ ☒

Beweis zu Satz 5.12

- "$\leq$": ist klar; wir zeigen "$\geq$".
- Es genügt, zu zeigen:

Gilt $\langle a,x\rangle = \delta$ für alle $x \in P$, (*)
so gibt es $\lambda \in \mathbb{R}^{Eq(P)}$ mit
$\lambda^T A_{Eq(P),*} = a$, $\langle \lambda, b_{Eq(P)}\rangle = \delta$.

- (*) $\Rightarrow$ $\delta = \max\{\langle a,x\rangle : Ax \leq b\}$
und $\boxed{\text{alle } x^* \in P \text{ sind Optimallösungen}}$ (**)

- Satz 4.16 (starke LP-Dualität) $\Rightarrow$

$\exists y^* \in \mathbb{R}^m_+ : (y^*)^T A = a$, $\langle b, y^*\rangle = \delta$
(duale Optimallösung)

- Satz 3.15 (komplementärer Schlupf) $\Rightarrow$
Ist $y^*_i > 0$ für ein $i \in [m]$, so ist

$\langle A_{i,*}, x^* \rangle = b_i$ für alle $x^* \in P$

(die sind sämtlich Optimallösungen), also $i \in Eq(P)$.

• Setze $\lambda := y^*_{Eq(P)}$ also

$$\lambda^T A_{Eq(P),*} = (y^*)^T A = a$$

$$\langle \lambda, b_{Eq(P)} \rangle = \langle y^*, b \rangle = \beta .$$ $\square$