$\boxed{\text{EMO } 21.11.16}$

Beweis zu Satz 3.12

- $G := g^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) \leq 0\}$
- Falls $g(x^*) < 0$, so ist $x^* \in \operatorname{int}(G)$

  $\Rightarrow N_{x^*}(G) = \{0\}$
- Sei also $g(x^*) = 0$; zu zeigen:

$$N_{x^*}(G) \overset{!}{=} \operatorname{cone}\{\operatorname{grad}_{x^*} g\}$$

"$\supseteq$": Wäre $\operatorname{grad}_{x^*} g \notin N_{x^*}(G)$, so gäbe es $x \in G$ mit $\langle \operatorname{grad}_{x^*} g, x - x^* \rangle > 0$

$\Rightarrow$ Es gibt $t \in [0,1]$ mit

$$g(\underbrace{x^* + t(x - x^*)}_{\in G}) > g(x^*) = 0 \quad \text{↯}$$

[G konvex, $x, x^* \in G$]

"$\subseteq$": • Es genügt, für alle $y \in \mathbb{R}^n$ zu zeigen: (!)

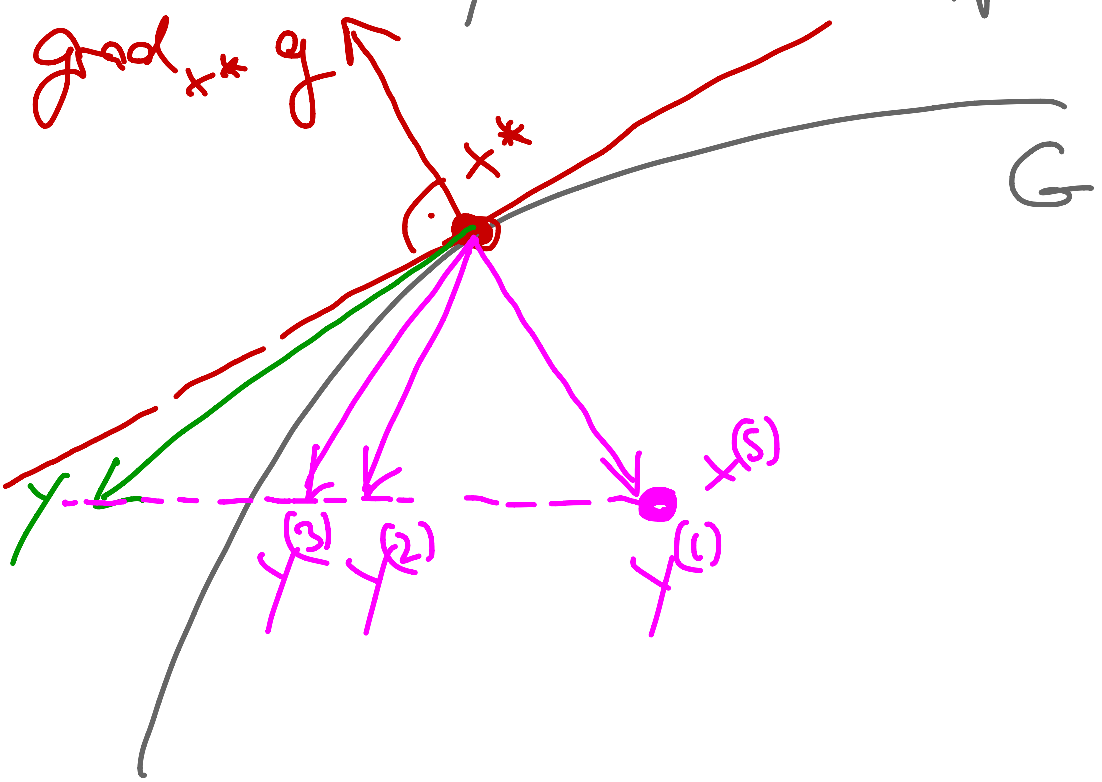
$$\langle \operatorname{grad}_{x^*} g, y \rangle \le 0 \Longrightarrow y \in \operatorname{cl}(K_{x^*}(G))$$

[Denn dann:

$$\left(\operatorname{cone}\{\operatorname{grad}_{x^*} g\}\right)^\circ \subseteq \operatorname{cl}(K_{x^*}(G))$$

$$\underset{(\ldots)^\circ}{\Longrightarrow} \operatorname{cone}\{\operatorname{grad}_{x^*} g\} \supseteq N_{x^*}(G)$$]

• Sei also $y \in \mathbb{R}^n$ mit $\langle \operatorname{grad}_{x^*}, y \rangle \le 0$.



- Definiere $y^{(k)} := \frac{1}{k}(x^{(s)} - x^*) + \frac{k-1}{k} y$

für alle $k = 1, 2, \dots$

- Dann: $\langle \operatorname{grad}_{x^*} g, y^{(k)} \rangle$

$$= \frac{1}{k} \underbrace{\langle \operatorname{grad}_{x^*} g, x^{(s)} - x^* \rangle}_{<0} + \frac{k-1}{k} \underbrace{\langle \operatorname{grad}_{x^*} g, y \rangle}_{\leq 0}$$

[da $g(x^{(s)}) < 0 = g(x^*)$ und g konvex]

$$< 0$$

- Daher gibt es für jedes k ein $t_k > 0$ mit

$$g(x^* + t_k y^{(k)}) < g(x^*) = 0$$

$$\Rightarrow x^* + t_k y^{(k)} \in G$$

$$\Rightarrow y^{(k)} \in K_{x^*}(G)$$

- Wegen $y = \lim_{k\to\infty} y^{(k)}$ ist also

$$y \in \mathrm{cl}\left(K_{x^*}(f)\right) \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 3.13

- Wir wissen: x^* Optimallösung $\Longleftrightarrow$

$$-\operatorname{grad}_{x^*} f \in \boxed{N_{x^*}(X)}$$

$$= N_{x^*}(X_0) + \sum_{i=1}^{[m]} \underbrace{N_{x^*}(g_i^{-1}(\mathbb{R}_-))}_{} + \sum_{i=1}^{p} \underbrace{N_{x^*}(h_i^{-1}(\{0\}))}_{= \operatorname{lin}\{\operatorname{grad}_{x^*} h_i\}}$$

$$N_{x^*}(g_i^{-1}(\mathbb{R}_-)) = \begin{cases} \{0\}, & \text{falls } g_i(x^*) < 0 \\ \operatorname{cone}\{\operatorname{grad}_{x^*} g_i\}, & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow \; \exists \lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \mu_1, \dots, \mu_p, y \in N_{x^*}(X_0):$

$$-\operatorname{grad}_{x^*} f = y + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad}_{x^*} g_i + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \operatorname{grad}_{x^*} h_i ,$$

$$\lambda_i = 0 \text{ falls } g_i(x^*) < 0$$

Beweis zu Satz 3.14

- Folgt aus Satz 3.13 mit $f(x) = \langle c, x \rangle$,

$$X_0 := \mathbb{R}^n_+, \quad m = 0,$$

$$h_i(x) = \langle A_{i,*}, x \rangle - b_i \quad (i \in [p])$$

(regulär vom Typ ①)

- Bedingung (2) ist leer ($m = 0$)

Bedingung (1) lautet dann (Lem. 3.8)

$$c + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \cdot A_{i,*} \in \{-x : x \in \mathbb{R}^n_-,\ x_j = 0\ \forall j : x^*_j > 0\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (c + \mu^T A)_j \begin{cases} = 0 & , \text{falls } x^*_j > 0 \\ \geq 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underset{\bar{\mu} := -\mu}{\Longleftrightarrow} \quad c_j \begin{Bmatrix} = \\ \geq \end{Bmatrix} \bar{\mu}^T A_{*,j} \quad \begin{cases} \text{falls } x^*_j > 0 \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$\boxtimes$

Beweis von Satz 3.15

- Folgt aus Satz 3.13 mit $f(x) = \langle -c, x \rangle$, $X_0 := \mathbb{R}^n$, $p = 0$, $g_i(x) = \langle A_{i,*}, x \rangle - b_i$ $(i \in [m])$

(regulär vom Typ (1))

- Bedingung (1) lautet dann:

$$-c + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot A_{i,*} \in \{-0\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -c + \lambda^T A = 0$$

- Bedingung (2) lautet:

$$\lambda_i = 0 \, , \text{ falls } \langle A_{i,*}, x^* \rangle - b_i < 0 \, . \quad \boxed{\equiv}$$