$\boxed{\text{EMO 22.11.16}}$

Beweis zu Satz 3.16

- Folgt aus Satz 3.13 mit $f(X)=\langle C,X\rangle$,

  $X_0 := \mathcal{S}^k_+ \ (\text{"}\subseteq\text{"}\ \mathbb{R}^n \text{ mit } n=\frac{k(k+1)}{2}),\quad m=0$

  $$h_i(X) = \langle A^{(i)}, X\rangle - b_i \qquad (i\in[p])$$

- Bedingung (2) ist leer.
- Bedingung (1) lautet (beachte Lem. 3.8)

$$C + \sum_{i=1}^{p} \mu_i A^{(i)} \in \{-Y : Y\in \mathcal{S}^k_+, \langle Y,X^*\rangle = 0\}$$

$$\iff Y := C - \sum_{i=1}^{p} \bar{\mu}_i A^{(i)} \in \mathcal{S}^k_+,\ \langle Y,X^*\rangle = 0$$

$\bar{\mu} := -\mu$

$\blacksquare$

Vgl.: $\left.\begin{array}{l} c^T - \mu^T A \geq 0 \text{ und} \\ \langle c^T - \mu^T A, x^*\rangle = 0 \end{array}\right\} \iff$ Bedingung in Satz 3.14

Prinzip DUALITÄT in der Optimierung

$$\min \{ f(x) : x \in X \} \qquad \text{(MIN)}$$

$$\max \{ g(y) : y \in Y \} \qquad \text{(MAX)}$$

"Schwache Dualität": $\text{MAX} \leq \text{MIN}$

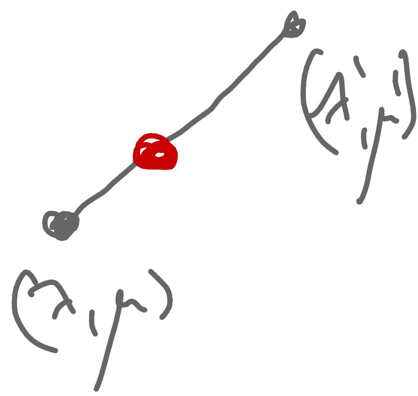
"Starke Dualität": $\text{MAX} = \text{MIN}$

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i h_i(x)$$

Zu Bem. 4.5

Für $(\lambda, \mu), (\lambda', \mu') \in \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^p$ und
$t \in [0, 1]$ gilt:

$$L_D\left(\boxed{t\lambda+(1-t)\lambda',\ t\mu+(1-t)\mu'}\right)$$



$$= \inf\Bigg\{ f(x) + \sum_{i=1}^{m}\left(t\lambda_i+(1-t)\lambda_i'\right)g_i(x) + \sum_{i=1}^{p}\left(t\mu_i+(1-t)\mu_i'\right)h_i(x) \ :\ x\in X_0 \Bigg\}$$

$$f(x) = t f(x) + (1-t) f(x)$$

$$= t\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i h_i(x)\right) + (1-t)\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i' g_i(x) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i' h_i(x)\right)$$

$$\geq t \inf\left\{\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(x) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i h_i(x)\right) : x\in X_0\right\}$$

$$+ (1-t)\inf\left\{\left(f(x) + \sum_{i=1}^{m}\lambda_i' g_i(x) + \sum_{i=1}^{p}\mu_i' h_i(x)\right) : x\in X_0\right\}$$

$$= t L_D(\lambda,\mu) + (1-t) L_D(\lambda',\mu')$$

Vorbemerkung zu Satz 4.6

Für alle $x \in X_0$, $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ gilt:

$$L_D(\lambda, \mu) = \inf \{ L(\tilde{x}, \lambda, \mu) : \tilde{x} \in X_0 \}$$

$$\leq$$

$$L(x, \lambda, \mu) \qquad (*)$$

$$\leq$$

$$L_P(x) = \sup \{ L(x, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) : \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+, \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^p \}$$

Insbesondere:

$$\sup \{ L_D(\lambda, \mu) : \lambda \in \mathbb{R}^m_+, \mu \in \mathbb{R}^p \}$$

$$\leq$$

$$\inf \{ L_P(x) : x \in X_0 \}$$

Das beweist Satz 4.6.