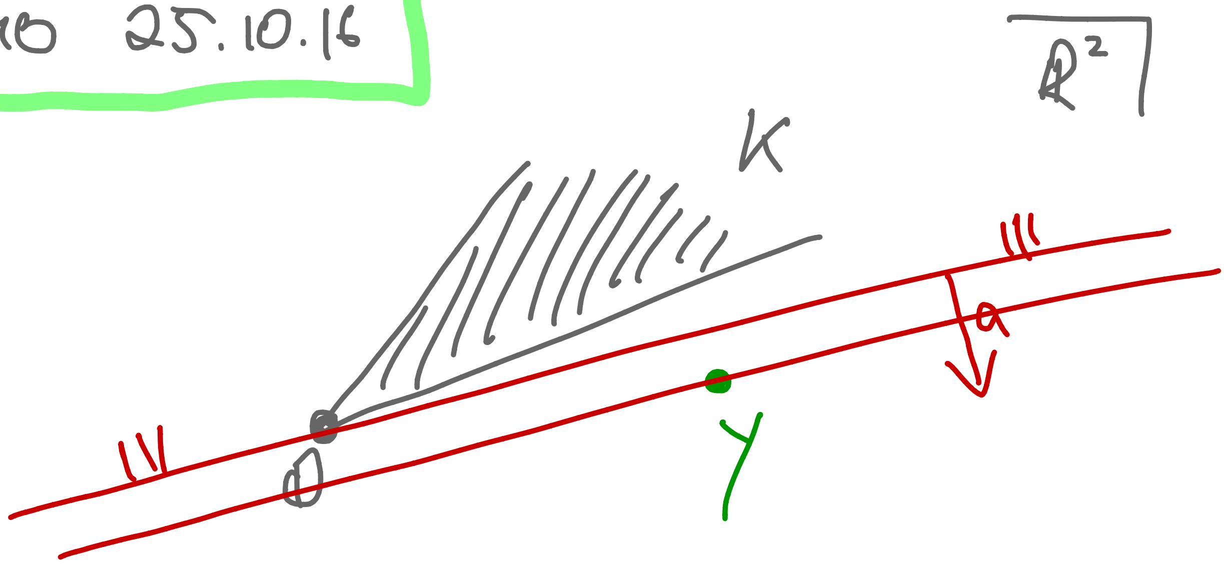
EMO 25.10.16



Beweis zu Satz 2.23

- Satz 2.15 $\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\langle a, x\rangle < \langle a, y\rangle \quad \forall x \in K \quad (*)$$

- Es gilt $\langle a, y\rangle > 0$

[Denn $0 \in K \Rightarrow \underbrace{\langle a, 0\rangle}_{0} < \langle a, y\rangle$]

- Nach Skalierung $a \leftarrow \frac{1}{\langle a, y\rangle} a$: $\langle a, y\rangle = 1$

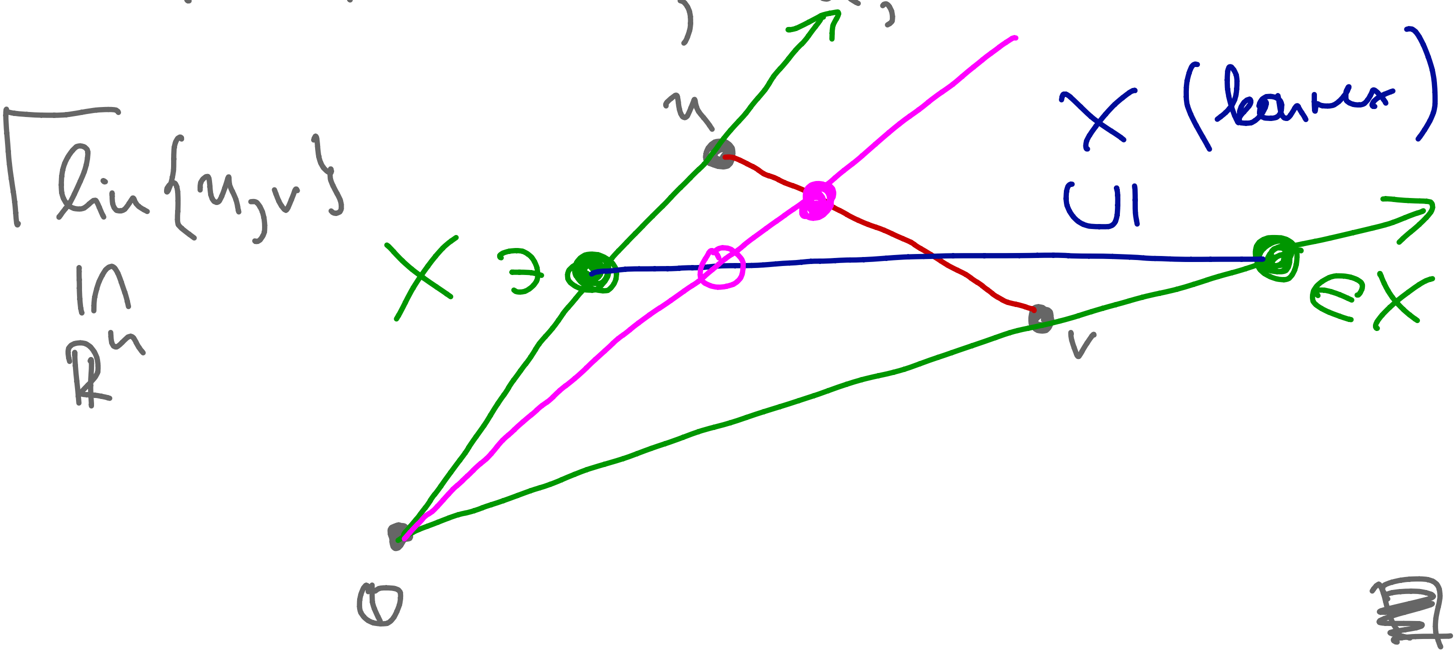
- Wäre $\langle a, x\rangle > 0$ für ein $x \in K$, so für genügend großes $\lambda > 0$: $\lambda x \in K$

$$\langle a, \lambda x\rangle > 1 \quad \text{↯} \ (*)$$

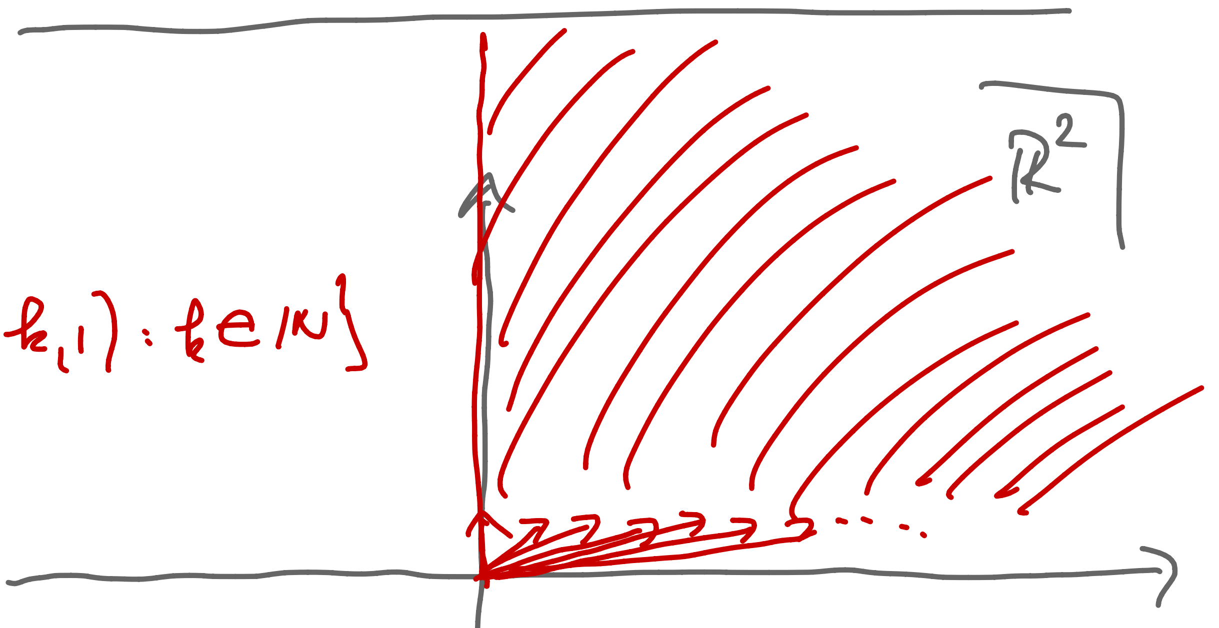
$\blacksquare$

Zu Bem. 2.26

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex; $u, v \in \operatorname{cone} X$

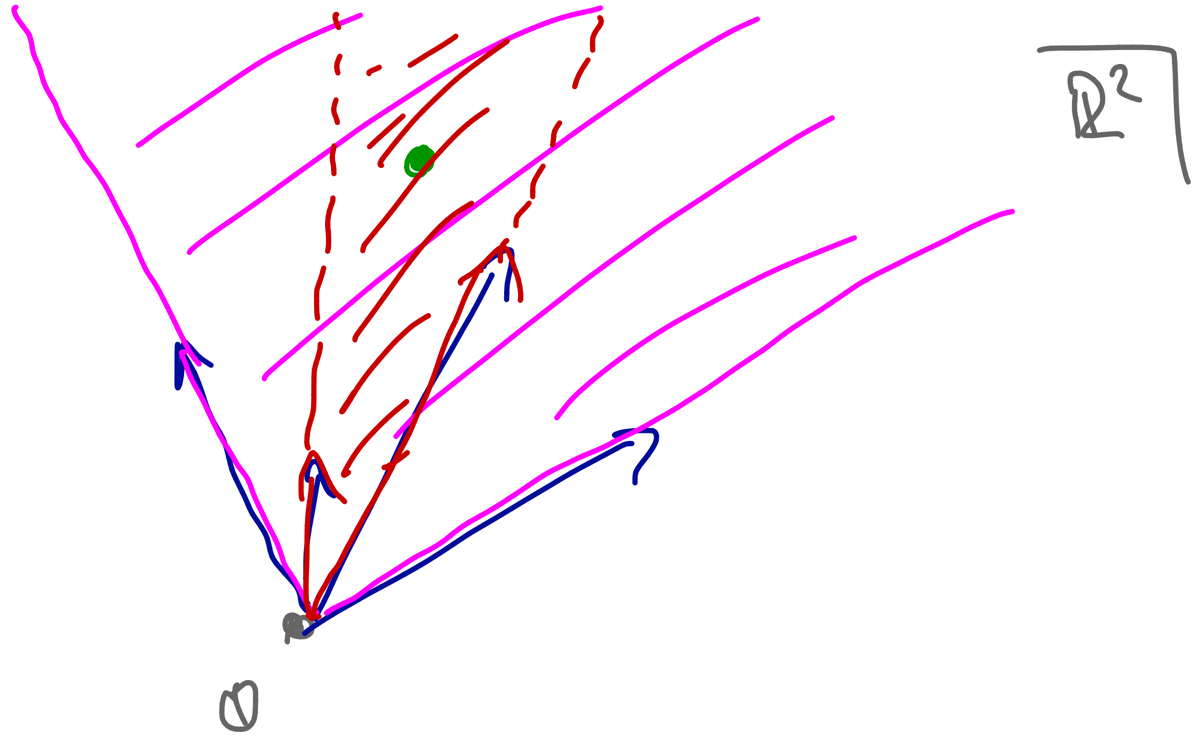


$X = \{(k,1) : k \in \mathbb{N}\}$



$$\operatorname{cone} X = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0,\ x_2 > 0\} \cup \{(0,0)\}$$

NICHT abgeschlossen!



Beweis zu Satz 2.31

- Wähle $\tilde{X} \subseteq X$ minimaler Kardinalität, so dass $\lambda_y \geq 0$ $(y \in \tilde{X})$ existieren mit

$$x = \sum_{y \in \tilde{X}} \lambda_y \cdot y$$

$[|\tilde{X}| < \infty$ nach Bem. 2.28.$]$

Insbes.: $\lambda_y > 0$ für alle $y \in \tilde{X}$.

- Angenommen, $\tilde{X}$ wäre linear abhängig.
- Dann gibt es $\mu_y \in \mathbb{R}$ $(y \in \tilde{X})$ mit

$$\sum_{y \in \tilde{X}} \mu_y \cdot y = 0 \quad , \quad \mu \neq 0_{\tilde{X}}$$

- Mittels Skalierung können wir annehmen:

$$\max\left\{ \frac{\mu_y}{\lambda_y} : y \in \tilde{X} \right\} = 1 \qquad (*)$$

- $$x = \sum_{y \in \tilde{X}} \lambda_y \cdot y - \underbrace{\sum_{y \in \tilde{X}} \mu_y \cdot y}_{0}$$

$$= \sum_{y \in \tilde{X}} \underbrace{(\lambda_y - \mu_y)}_{\substack{\geq 0 \text{ für alle } y \in \tilde{X} \\ = 0 \text{ für ein } y \in \tilde{X}}} \cdot y$$

$(*)$, $\lambda_y > 0 \ \forall y$

$\Downarrow$

⚡ Minimalität von $|\tilde{X}|$ ∎

Beweis zu Satz 2.32

- Sei $K = \operatorname{ccone} X$ mit $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $|X| < \infty$.
- Konvexität: klar
- Satz 2.31 $\Longrightarrow$ $K = \bigcup\limits_{\substack{\tilde{X} \subseteq X \\ \tilde{X} \text{ lin. unabh.}}} \boxed{\operatorname{ccone} \tilde{X}}$

endlich viele Mengen

simplizialer Kegel

- Da Vereinigungen <u>endlich vieler</u> abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind, genügt es, zu zeigen, dass simpliziale Kegel abgeschlossen sind.
- Sei $\tilde{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ also linear unabhängig.
- Ergänze $\tilde{X}$ zu einer Basis $\tilde{X} \,\dot{\cup}\, Y$ von $\mathbb{R}^n$ und definiere die linearen

Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\tilde{X}}$ via

$$\varphi(x) := e_{\tilde{x}} \qquad \forall x \in \tilde{X}$$

$$\varphi(y) := 0 \qquad \forall y \in Y$$

- Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\mathbb{R}_+^{\tilde{X}}$ unter der stetigen Abbildung φ ist $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^{\tilde{X}})$ $(\subseteq \mathbb{R}^n)$ abgeschlossen.
- $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^{\tilde{X}}) = \left\{ \sum_{x \in \tilde{X}} \lambda_x \cdot x + \sum_{y \in Y} \mu_y \cdot y : \lambda_x \geq 0 \ \forall x \in \tilde{X} \right\}$

$$= \operatorname{ccone} \tilde{X} + \operatorname{lin} Y$$

- Schneiden mit $\operatorname{lin} \tilde{X}$ auf beiden Seiten liefert:

$$\underbrace{\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^{\tilde{X}}) \cap \underbrace{\operatorname{lin} \tilde{X}}_{\text{abg.}}}_{\text{abgeschl.}} = \operatorname{ccone} \tilde{X} + \underbrace{(\operatorname{lin} Y) \cap (\operatorname{lin} \tilde{X})}_{\{0\}}$$

$\blacksquare$