Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 1

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 18.10.2016 oder vorher in G02-204

Wichtige organisatorische Informationen

- Es gibt in jeder Woche ein Übungsblatt mit Aufgaben im Wert von in der Regel 20 Punkten. Die Lösungen sind einzeln anzufertigen, sollen spätestens in der Übung der folgenden Woche abgegeben werden und die Aufgaben werden in dieser Übung besprochen, bzw. vorgerechnet. Die bewerteten Lösungen werden in der darauffolgenden Woche zurückgegeben.
- Voraussetzungen für die Teilnahme an der Klausur zum Erwerb des Leistungsnachweises sind $\geq 50\,\%$ der Punkte aus den Übungen *und* das erfolgreiche Vorrechnen einer der Aufgaben.
- Die Klausur ist für Dienstag, den 24.01.2017 um 07:30 (reguläre Übungszeit) angesetzt.

Zur Erinnerung ($M \subseteq \mathbb{R}$ beliebig, $g : M \to \mathbb{R}$):

- $\mathcal{O}(g) := \{f : M \to \mathbb{R} : \exists C, x_0 \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|\}$
- $\Omega(g) := \{f : M \to \mathbb{R} : \exists C > 0, x_0 \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \geq x_0$ gilt: $|f(x)| \geq C \cdot |g(x)|\}$
- $\Theta(g) := \mathcal{O}(g) \cap \Omega(g)$
- $o(g) := \{f : M \to \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists x_0^\varepsilon \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \geq x_0^\varepsilon$ gilt: $|f(x)| \leq C \cdot |g(x)|\}$
- $\omega(g) := \{f : M \to \mathbb{R} : \forall C\ \exists x_0^C \in \mathbb{R}$ so dass für alle $x \geq x_0^C$ gilt: $|f(x)| \geq C \cdot |g(x)|\}$
- Man schreibt statt "$\in$" auch "$=$" oder "$\leq$" / "$\geq$".

Aufgabe 1 (1+1+1+1+1 Punkte)

Beweise oder widerlege folgende Aussagen:

(a) $\mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(g)$

(b) $\mathcal{O}(g_1) \cdot \mathcal{O}(g_2) \subseteq \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$

(c) Seien $f_1(n), f_2(n) \geq 0$ für alle n. Definiere $\max(f_1, f_2)(n) := \max\{f_1(n), f_2(n)\}$. Dann ist $\max(f_1, f_2) \in \Theta(f_1 + f_2)$.

(d) Für alle $f, g : M \to \mathbb{R}$ gilt: $f \in \omega(g) \ \Rightarrow\ f \in \Omega(g)$

(d) $3^{3n} \in \mathcal{O}(3^n)$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten folgenden Algorithmus:

Algorithmus : Power
Eingabe : Zweierpotenz $n \in \mathbb{N}$

$k \longleftarrow \log_2(n)$
$p \longleftarrow 2$
for $i \longleftarrow 1, \dots, k$ **do**
    $p \longleftarrow p \cdot p$
end
return p

Bestimme in Abhängigkeit von n (asymptotisch)

(a) die Länge der Eingabe (binär kodiert),

(b) die Länge der Ausgabe (binär kodiert),

(c) die Anzahl der Schritte des Algorithmus, wenn jede arithmetische Operation und die Funktionsauswertung von log als jeweils 1 Schritt zählen, sowie

(d) die Anzahl der Schritte des Algorithmus, wenn arithmetische Operationen mit s Bits Eingabe und t Bits Ausgabe $\mathcal{O}(s+t)$ Schritte benötigen.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Bestimme $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\widetilde{b} \in \mathbb{R}^m$ und $\widetilde{c} \in \mathbb{R}^n$, so dass die linearen Optimierungprobleme (LPs)

$$\min \{ \langle c, x \rangle : Ax \geq b, x \in \mathbb{R}^n \}$$

und

$$\max \left\{ \langle \widetilde{c}, x \rangle : \widetilde{A}x \leq \widetilde{b}, x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

die gleichen zulässigen Lösungen und die gleichen Optimallösungen haben.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $e \in \mathbb{R}^p$ seien

$$X(A,b) = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \} \quad \text{und} \quad Y(B,e) = \{ y \in \mathbb{R}^q : By = e, y \geq \mathbb{O}_q \} .$$

(a) Zeige, dass es für jedes (B,e) ein (A,b) gibt mit $Y(B,e) = X(A,b)$.

(b) Zeige, dass es für jedes (A,b) ein (B,e) und eine lineare Abbildung $\tau : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^n$ gibt, so dass $\tau(Y(B,e)) = X(A,b)$ ist. Wie kann man bei gegebenem $c \in \mathbb{R}^n$ durch Lösen eines linearen Optimierungsproblems über $Y(B,e)$ eine Optimallösung für das LP $\max \{ \langle c, x \rangle : x \in X(A,b) \}$ bestimmen?

Bemerkung: Mit Hilfe solcher Transformationen können lineare Optimierungsmodelle in verschiedene Formen gebracht werden (mit beliebigen Mischungen von Gleichungen, Ungleichungen, vorzeichenbeschränkten und nicht vorzeichenbeschränkten Variablen).

Hinweis: Für (b) werden wesentlich mehr als nur n Variablen benötigt.