Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 2

`www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/`

Abgabe in der Übung am 24.10.2016 oder vorher in G02-204

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Aus der Algorithmischen Mathematik ist der Euklidische Algorithmus zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b$ bekannt:

Algorithmus : EuklidischerAlgorithmus
Eingabe : $a, b \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a \leq b$

Solange $a \neq 0$ **tue**
  $t \longleftarrow a$
  $a \longleftarrow b \bmod a$ (Rest bei Division von b durch a)
  $b \longleftarrow t$
Ende
Ergebnis : b

Beweise, dass dieser Algorithmus das Ergebnis in polynomial (in der Bit-Länge der Eingabe) vielen Schritten liefert. Dabei darf die Korrektheit des Algorithmus verwendet werden.

Hinweis: Schätze a von oben durch die Eingabelänge ab und beobachte, wie sich a nach 2 Schleifendurchläufen verändert hat, um eine obere Schranke an die Anzahl der Schleifendurchläufe zu erhalten.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Beweise Satz 1.20 (Teil 1) aus der Vorlesung: Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ die Hesse-Matrix von f positiv semidefinit ist.

Hinweis: Eine solche Funktion ist genau dann konvex, wenn $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt:
$\nabla f(x)^T (x - y) \leq f(y) - f(x)$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Seien eine konvexe Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und k Punkte $x^{(1)}, \dots, x^{(k)} \in X$, sowie eine konvexe Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben. Beweise für jedes $x := \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)}$ mit $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$ und $\lambda \geq \mathbb{O}_k$, dass gilt:

(a) $x \in X$

(b) $f(x) \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f\left(x^{(i)}\right)$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweise Satz 1.10 aus der Vorlesung: Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex und konkav, wenn sie affin ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.8, Teil 1: Die konvexe Hülle von $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge der konvexen Kombinationen von endlich vielen Punkten aus X.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Zeige, dass lineare Abbildungen konvexe Mengen auf konvexe Mengen abbilden.