Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 3

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 07.11.2016 oder vorher in G02-204

Wichtige organisatorische Informationen

- Ab dieser Übung erfolgt die Abgabe zu zweit.
- Die Übung am 31.10.2016 fällt aus.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Krankenhaus möchte Ärzte einstellen, sodass an jedem der Wochentage $1, 2, \ldots, 7$ eine Mindestanzahl an Ärzten $d_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$ verfügbar ist. Jeder Arzt arbeitet für die zu planende Zeit jede Woche an den selben 5 aufeinanderfolgenden Tagen, wobei Tag 1 auf Tag 7 folgt, und ruht sich an den verbliebenen 2 Tagen aus.
Modelliere das Problem, möglichst wenig Ärzte einzustellen, als ganzzahliges lineares Optimierungsproblem (also ein lineares Optimierungsproblem mit der Restriktion, dass nur ganzzahlige Lösungsvektoren erlaubt sind). Erkläre, warum der Optimalwert Deines Modells tatsächlich gleich der minimalen Anzahl einzustellender Ärzte ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wie kann man ein lineares Optimierungsproblem $\min\{\langle c, x\rangle : Ax = b, x \geq \mathbb{O}_n\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$) als ein semidefinites Optimierungsproblem formulieren?

Hinweis: Identifiziere den $\mathbb{R}^n$ mit der Menge der Diagonalmatrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ und füge geeignete Gleichungen hinzu, um $Ax = b$ und (mit Hilfe der positiven Semidefinitheit der Matrix) $x \geq \mathbb{O}_n$ zu erzwingen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Durch die Definition

$$\langle A, B\rangle \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} \;=\; \operatorname{tr}(A^\top B) = \operatorname{tr}(AB^\top)$$

für Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ definiert (das *Frobenius-Skalarprodukt*), wobei $\operatorname{tr}(C) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$ die Spur von $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist. Sei $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ der Untervektorraum der symmetrischen Matrizen, und sei $\mathbb{S}^n_+ \subseteq \mathbb{S}^n$ die Menge aller positiv semidefiniten symmetrischen $n \times n$-Matrizen.

Beweise, dass $(\mathbb{S}^n_+)^\circ \cap \mathbb{S}^n = -\mathbb{S}^n_+$ für den bezüglich des oben definierten Skalarprodukts in $\mathbb{S}^n$ gebildeten polaren Kegel von $\mathbb{S}^n_+$ gilt (in $\mathbb{S}^n$ ist der polare Kegel der positiv semidefiniten symmetrischen Matrizen also genau der Kegel der negativ semidefiniten symmetrischen Matrizen).

Hinweis: Ist $A \in \mathbb{S}^n_+$ und bilden $z^{(1)}, \ldots, z^{(n)} \in \mathbb{R}^n$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von A (mit zugehörigen Eigenwerten λ_i), so ist $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i z^{(i)} {z^{(i)}}^\top$. Umgekehrt ist für $z \in \mathbb{R}^n$ die Matrix $zz^\top$ positiv semidefinit.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.36: Der polare Kegel eines Kegels ist ein abgeschlossener konvexer Kegel.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Beweise Bemerkung 2.38: Für jeden abgeschlossenen konvexen Kegel K gilt: $K^{\circ\circ} = K$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Beweise, dass die Kodierungslänge der Determinante einer Matrix $M \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ polynomiell in der Kodierungslänge von M ist.

Hinweis: Schätze zunächst die Determinante einer *ganzzahligen* Matrix M' mit Hilfe der Leibniz-Formel als höchstens

$$\mathcal{O}\left(n^2 \log(n) \cdot \max\left\{\left\langle |M'_{i,j}| \right\rangle : i, j \in [n]\right\}\right)$$

ab.