Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 4

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 21.11.2013 oder vorher in G02-207b

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweise folgende Variante des Farkas-Lemmas: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gilt: Entweder es gibt $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$ und $x \geq \mathbb{O}_n$ oder es gibt ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\intercal A \geq \mathbb{O}_n$ und $y^\intercal b = -1$ (aber nicht beides).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeige, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}$$

das Ungleichungssystem $Ax \leq -\mathbb{1}_4$ keine Lösung hat.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Ein System $Ax \leq b$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$) von linearen Ungleichungen heißt *minimal unzulässig*, falls $P^{\leq}(A,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\} = \varnothing$ ist, aber für jedes Subsystem $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$, das aus $Ax \leq b$ durch Weglassen irgendeiner Ungleichung entsteht, $P^{\leq}(\tilde{A},\tilde{b}) \neq \varnothing$ ist.
Zeige, dass für ein minimal unzulässiges System $Ax \leq b$ für jedes solche Subsystem sogar $\left\{x \in \mathbb{R}^n : \tilde{A}x = \tilde{b}\right\} \neq \varnothing$ gilt.

Hinweis: Wir können annehmen, dass $\tilde{A}x \leq \tilde{b}$ aus $Ax \leq b$ durch Weglassen der letzten Ungleichung entstanden ist. Seien $\langle a^{(i)}, x\rangle \leq b_i$ ($i \in [m]$) die Ungleichungen des Systems $Ax \leq b$. Für $0 \leq p < q \leq m$ sei $\mathcal{A}(p,q)$ das System der $m-1$ Gleichungen und Ungleichungen

$$\begin{aligned} \left\langle a^{(i)}, x\right\rangle &= b_i \qquad (i \leq p) \\ \left\langle a^{(i)}, x\right\rangle &\leq b_i \qquad (i > p, i \neq q)\ . \end{aligned}$$

Konstruieren Sie nun induktiv Lösungen $x(p,q)$ von $\mathcal{A}(p,q)$ ($p = 0,\dots,m-1$, $q = p+1,\dots,m$).

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeige (ohne Verwendung der konvexgeometrischen Resultate aus der Vorlesung) den wichtigen Teil des Farkas-Lemmas: Sind $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ so, dass das Polyeder $P^{\leq}(A,b) = \varnothing$ ist, so gibt es $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq \mathbb{O}_m$, mit $y^\intercal A = \mathbb{O}_n$ und $y^\intercal b = -1$.

Hinweis: Wir können annehmen, dass $Ax \leq b$ minimal unzulässig ist (warum?). Da die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\} = \varnothing$ ist, gibt es nach Linearer Algebra ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $y^\intercal A = \mathbb{O}_n$ und $y^\intercal b = -1$.
Zeige mit Hilfe des Resultats über minimal unzulässige Systeme, dass $y \geq \mathbb{O}_m$ ist.