Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 5

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 21.11.2013 oder vorher in G02-204

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweise die Aussage aus der Vorlesung:
Für $x^* \in P^{\leq}(A,b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$) gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{K}_{x^*}\left(P^{\leq}(A,b)\right) &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle A_{i,*}, y\rangle \leq 0 \text{ für alle } i \in \mathrm{Eq}_{Ax\leq b}(x^*)\} \\ \mathrm{N}_{x^*}\left(P^{\leq}(A,b)\right) &= \operatorname{ccone}\{A_{i,*} : i \in \mathrm{Eq}_{Ax\leq b}(x^*)\} \end{aligned}$$

Insbesondere sind also Radial- und Normalenkegel an Polyeder polyedrisch.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Beweise die Aussage aus der Vorlesung:
Für einen konvexen Kegel $K \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x^* \in K$ gilt $\mathrm{N}_{x^*}(K) = \{y \in K^\circ : \langle y, x^*\rangle = 0\}$.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte)

Zeigen Sie für folgende Aussage: Für jeden abgeschlossenen konvexen Kegel K gilt: $K^{\circ\circ} = K$, dass beide Eigenschaften notwendig sind. Geben Sie dazu zwei Kegel im $\mathbb{R}^2$ an, sowie deren polare und bipolare Kegel. Verdeutlichen Sie Ihre beiden Gegenbeispiele graphisch.

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte)

Minimieren sie die quadratische Funktion $q(x) = x^T Q x$ mit $x \in \mathbb{R}^2$ und

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

über verschiedene Bereiche beschrieben durch $X = \{x \in \mathbb{R}^2 : Ax \leq b\}$. Die Matrix A ist gegeben durch:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die verschiedenen Bereiche ergeben sich durch die drei Vektoren b:

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Argumentieren Sie mit dem Normalenkegel im jeweiligen Optimalpunkt. Warum ist dieser Punkt eindeutig?