Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 6

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 28.11.2016 oder vorher in G02-204

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wir betrachten das folgende konvexe Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcl} \min & x^2+y^2+z^2 & & \\ \text{s.t.} & (x-5)^2+(y-5)^2+z^2 & \leq & 10 \\ & -x+y & = & 4 \end{array}$$

Konstruiere dazu das Tripel $(X_0, (g_i)_{i\in[m]}, (h_i)_{i\in[p]})$ und zeige die Regularität.

Rate eine Optimallösung (sie ist ganzzahlig) und beweise die Optimalität mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine wichtige Klasse von konvexen Optimierungsproblemen zwischen der linearen und der semidefiniten Optimierung wird von den Problemen gebildet, bei welchen die Zielfunktion f und die Nebenbedingungsfunktionen g_i affin sind, und die Menge X_0 das kartesische Produkt von Lorentz-Kegeln (second-order cone) der Form

$$\mathbb{L}^q := \left\{ x \in \mathbb{R}^q : x_q \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{q-1} x_i^2} \right\}$$

mit $q \geq 1$ ist (*second-order programs (SOPs)*).

Zeige, dass die Klasse der SDPs die SOPs als Sonderfall enthält, indem Du

$$x \in \mathbb{L}^q \iff \begin{pmatrix} x_q & \dots & x_2 & x_1 \\ \vdots & \ddots & & \\ x_2 & & x_q & \\ x_1 & & & x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^q_+$$

nachweist (leere Einträge haben den Wert 0).

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Zeige, wie ein konvex-quadratisches Minimierungsproblem, bei dem die Zielfunktion und die Nebenbedingungen konvexe quadratische Funktionen sind, als SOP formuliert werden kann. Dazu genügt es, folgendes zu zeigen:

Ist durch $g(x) = x^\intercal Bx + \langle c, x\rangle + \delta$ (mit $B \in \mathbb{S}^n_+$, $c \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in \mathbb{R}$) eine konvexe quadratische Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert, so gilt für $B = D^\intercal D$ mit $D \in \mathbb{R}^{\text{rang}(B)\times n}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$:

$$g(x) \leq 0 \iff (2Dx, 1 + \langle c, x\rangle + \delta, 1 - \langle c, x\rangle - \delta) \in \mathbb{L}^{\text{rang}(B)+2}$$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte)

Wir betrachten das Polyeder $P^{\leq}([A|B], c) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + By \leq c\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times p}$ und $c \in \mathbb{R}^m$) und den Kegel $K := \{\lambda \in \mathbb{R}^m_+ : \lambda^\top B = \mathbb{O}_p\}$.

Beweise, dass $\{x \in \mathbb{R}^n : \lambda^\top Ax \leq \lambda^\top c \quad \forall \lambda \in K\}$ die Projektion von $P^{\leq}([A|B], c)$ auf die x-Variablen ist.

Beweise ferner, dass die Projektion ein Polyeder ist.

Hinweis: Für Teil 1 könnte das Farkas-Lemma nützlich sein. Für Teil 2 muss man zeigen, dass man nur endlich viele der unendlich vielen via K erzeugten Ungleichungen benötigt.

Aufgabe 5 (3+2 Punkte)

Die aus Aufgabe 4 bekannte Formulierung für Projektionen von Polyedern bildet u.a. die Grundlage für einen Algorithmus, der testet, ob ein gegebenes Polyeder $P = P^{\leq}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$ leer ist. Dazu konstruieren wir die Projektion auf die ersten $n-1$ Variablen, welche genau dann leer ist, wenn $P = \varnothing$ ist. Da das Problem für $n = 1$ trivial ist, ergibt sich ein einfaches rekursives Verfahren.
Seien $(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ die Variablen und P_x die genannte Projektion (d.h. das Bild der Projektionsabbildung). Finde eine endliche Beschreibung des Polyeders P_x (durch Ungleichungen), indem Du ein endliches Erzeugendensystem für den *Projektionskegel* (der Kegel K aus Aufgabe 4) aufstellst.
Zeige außerdem, wie man aus einer Lösung $\widetilde{x} \in P_x$ eine Lösung $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in P$ konstruiert.

Hinweis: Das Verfahren nennt man Fourier-Motzkin-Elimination.