Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Tobias Weber
Wintersemester 2016/2017

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 7

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 05.12.2016 oder vorher in G02-204

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte)

Bestimme die dualen Probleme für die folgenden linearen Optimierungsprobleme:

1. $\max\{\langle c,x\rangle : Ax \le b\}$
2. $\max\{\langle c,x\rangle : Ax \le b, x \ge \mathbb{O}\}$
3. $\max\{\langle c,x\rangle : Ax = b, x \ge \mathbb{O}\}$
4. $\min\{\langle c,x\rangle : Ax = b, x \ge \mathbb{O}\}$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Dualisiere das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrrrrrrrrrrrl}
\max & 5x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & - & 6x_4 & + & 2x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & & & + & 7x_5 & = & 2 \\
- & x_1 & & & - & 7x_3 & + & 3x_4 & & & \ge & -4 \\
 & & + & 4x_2 & & & - & 5x_4 & & & = & -7 \\
 & 3x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & & & - & 4x_5 & \le & 5 \\
\multicolumn{12}{r}{x_1, x_3 \in \mathbb{R}_+, x_2 \in \mathbb{R}_-, x_4, x_5 \in \mathbb{R}}
\end{array}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Betrachte die Vektoren $a_1 = (1,1,0)$ und $a_2 = (0,1,1)$ und die LPs

$$\min\{\langle c,x\rangle \mid Ax = b, x \ge \mathbb{O}\} \text{ und} \tag{std-LP}$$
$$\max\{\langle b,y\rangle \mid A^\top y \le c\}\ . \tag{std-LP-dual}$$

Finde einen Vektor $a_3 \in \mathbb{R}^3$, sodass für $A = (a_1, a_2, a_3)$ folgendes möglich ist:

(a) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unbeschränkt und (std-LP-dual) unzulässig sind.

(b) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unzulässig und (std-LP-dual) unbeschränkt sind.

(c) Es gibt $b, c \in \mathbb{R}^3$, sodass (std-LP) unzulässig und (std-LP-dual) unzulässig sind.

Aufgabe 4 (2+4 Punkte)

Sei (V, E) ein vollständiger bipartiter Graph, d.h. ein Graph mit Knotenmenge $V = U \cup W$, $U \cap W = \varnothing$ und Kantenmenge $E = \{\{u, w\} : u \in U, w \in W\}$. Für $v \in V$ sei $\mathrm{N}(v) = \{v' \in V : \{v, v'\} \in E\}$ die Menge aller zu v benachbarten Knoten (also $\mathrm{N}(u) = W$ für $u \in U$ und $\mathrm{N}(w) = U$ für $w \in W$). Seien $c \in \mathbb{R}^E$ und $b \in \mathbb{R}^V_+$.

1. Dualisiere das lineare Optimierungsproblem
$$\min\left\{\sum_{e\in E} c_e x_e : \sum_{v'\in \mathrm{N}(v)} x_{\{v,v'\}} = b_v \text{ für alle } v \in V, x \in \mathbb{R}^E_+\right\} . \tag{1}$$
Das duale Problem soll in ähnlichem Stil formuliert sein wie das primale.

2. Zeige, dass (1) genau dann zulässig ist, wenn $\sum_{u\in U} b_u = \sum_{w\in W} b_w$ ist.
Hinweis: Für den Fall der Unzulässigkeit benutzt man am besten ein Farkas-Lemma und zeigt, dass man einen Vektor y von Multiplizierern findet, dessen Komponenten für ein $\alpha > 0$ sämtlich aus $\{-\alpha, \alpha\}$ sind.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Beweise das "Farkas-Lemma zur Charakterisierung der gültigen Ungleichungen": Sei $P = P^{\le}(A, b)$ für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m$ ein nicht-leeres Polyeder. Die für P gültigen Ungleichungen (Ungleichungen die von allen $x \in P$ erfüllt werden) sind genau die der Form $(\lambda^\intercal A)\, x \le \lambda^\intercal b + \lambda_0$ für $\lambda \in \mathbb{R}^m_+, \lambda_0 \in \mathbb{R}_+$.

Hinweis: Für die schwierigere Richtung kann man ein Ungleichungssystem aufstellen, welches die obige Darstellbarkeit modelliert. Falls dann keine Darstellung existiert, helfen die gewonnenen Farkas-Multiplizierer, einen Widerspruch zu konstruieren.