

Einführung in die Mathematische Optimierung – Blatt 8

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/emo/

Abgabe in der Übung am 12.12.2016 oder vorher in G02-204

Aufgabe 1

(4 Punkte)

Seien $c = (7, 6, 5, -2, 3) \in \mathbb{R}^5$, $b = (4, 3, 5, 1) \in \mathbb{R}^4$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & -2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wollen überprüfen, ob $x^* = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)$ eine Optimallösung von $\max \{ \langle c, x \rangle : Ax \leq b, x \geq \mathbb{0}_5 \}$ ist. Betrachte dazu eine potenzielle Lösung y^* des dualen LPs und wende auf x^* und y^* den Satz vom komplementären Schlupf an.

Aufgabe 2

(3+3 Punkte)

Wir betrachten das folgende sogenannte s - t -Fluss-Problem: Ein gerichteter Graph D mit Knotenmenge V und Bogenmenge A sei gegeben, sowie eine Quelle $s \in V$ und eine Senke $t \in V$. Es seien $w \in \mathbb{R}_+^A$ Kapazitäten auf den Bögen. Ein *Fluss* ist ein $x \in \mathbb{R}_+^A$ mit der Eigenschaft

$$\begin{array}{ll} \sum_{(v,w) \in A} x_{(v,w)} = \sum_{(u,v) \in A} x_{(u,v)} & \text{für alle } v \in V \setminus \{s, t\} \quad \text{Flusserhaltung} \\ 0 \leq x_a \leq w_a & \text{für alle } a \in A \quad \text{Kapazitätsbeschränkung} \end{array}$$

Der *Wert* eines Flusses x ist $\sum_{(s,u) \in A} x_{(s,u)}$. Seien nun $c \in \mathbb{R}_+^A$ Kosten für die Bögen. Die Kosten eines (s, t) -Flusses x sind als $\sum_{a \in A} c_a x_a$ definiert.

- Modelliere das Problem, einen (s, t) -Fluss vom Wert 1 zu finden, dessen Kosten minimal sind, durch ein lineares Problem.
- Stelle das duale Problem auf.

In beiden Fällen sollen für das entsprechende LP nicht einfach Symbole für Matrizen/Vektoren, sondern einzelne (Un-)Gleichungen (quantifiziert mit “für alle ...”) angegeben werden.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

(3+3 Punkte)

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit a_1, \dots, a_n paarweise verschieden. Betrachte das folgende LP.

$$\begin{aligned} \min \quad & \langle b, x \rangle - \langle b, y \rangle \\ \sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k &= 1 \\ \sum_{k=1}^n x_k &= \sum_{k=1}^n y_k \\ \langle a, x \rangle &= \langle a, y \rangle \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Stelle das duale LP auf.
 (b) Beweise, dass der mit -1 multiplizierte Optimalwert gleich

$$\min \left\{ \max_{k=1, \dots, n} |b_k - \mu a_k - \beta| : \mu, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

ist, also der kleinste vertikale Maximalabstand einer Geraden zu den n Punkten (a_k, b_k) .

Aufgabe 4

(2+2 Punkte)

Zeige (mit elementaren Mitteln):

- (a) $\text{conv}(\{0, 1\}^n) = \{x \in \mathbb{R}^n : \mathbb{0}_n \leq x \leq \mathbb{1}_n\}$ (n -dimensionaler 0/1-Würfel)
 (b) $\text{conv}(\{e_1, \dots, e_n\}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbb{1}_n, x \rangle = 1, x \geq \mathbb{0}_n\}$ ($(n-1)$ -dim. Standardsimplex)