Vorlesung
Kombinatorische Optimierung
(Wintersemester 2016/17)

Kapitel 3: Matchings

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 10. November 2016)

Matchings

Definition 3.1

Ein **Matching** in einem Graphen $G = (V, E)$ (mit Kantenmenge $E \subseteq \binom{V}{2}$) ist eine Kantenteilmenge $M \subseteq E$ mit

$$e \cap e' = \emptyset$$

für alle $e, e' \in M$ mit $e \neq e'$. Ein Matching $M \subseteq E$ heißt **perfekt**, wenn

$$M \cap \delta(v) \neq \emptyset$$

für alle $v \in V$ gilt (oder äquivalent dazu: $V = \bigcup_{e \in M} e$).

Bipartite Graphen

Definition 3.2

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt **bipartit**, wenn es eine Bipartition $V = X \uplus Y$ (mit $X \cap Y = \emptyset$) gibt mit

$$e \not\subseteq X \quad \text{und} \quad e \not\subseteq Y$$

für alle $e \in E$.

Bemerkung 3.3

Ein Graph ist genau dann bipartit, wenn er keinen Kreis ungerader (kombinatorischer) Länge enthält.

Satz von Hall

Satz 3.4

Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ mit Bipartition $V = X \uplus Y$ und $|X| = |Y|$ hat entweder ein perfektes Matching oder es gibt $A \subseteq X$ mit $|N(A)| < |A|$ (aber nicht beides).

Satz von König

Definition 3.5

Eine **Knotenüberdeckung** eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Knotenteilmenge $W \subseteq V$ mit

$$e \cap W \neq \emptyset$$

für alle $e \in E$.

Satz 3.6

In einem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.

(Kombinatorische starke Dualität, **Min-Max Resultat**)

Matchingprobleme

Problem 3.7 (Kardinalitäts-Matchingproblem)

Instanz: *Graph* $G = (V, E)$

Aufgabe: *Bestimme ein Matching maximaler Kardinalität in* G.

Problem 3.8 (Gewichtetes Matchingproblem)

Instanz: *Graph* $G = (V, E)$, *Kantengewichte* $w \in \mathbb{Q}^E$

Aufgabe: *Bestimme ein Matching* $M \subseteq E$ *maximalen Gewichts* $w(M)$.

Problem 3.9 (Gewichtetes perfektes Matchingproblem)

Instanz: *Graph* $G = (V, E)$, *Kantenkosten* $c \in \mathbb{Q}^E$

Aufgabe: *Bestimme ein perfektes Matching* $M \subseteq E$ *minimaler Kosten* $c(M)$ *oder stelle fest, dass* G *kein perfektes Matching hat.*

Alternierende Pfade

Definition 3.14

Sei $M \subseteq E$ ein Matching in $G = (V, E)$. Ein Knoten $v \in V$ heißt M-**exponiert**, wenn $v \notin e$ für alle $e \in M$ gilt. Die Menge der M-exponierten Knoten ist $X_M \subseteq V$.
Ein Tupel $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ von Knoten in V mit $\ell > 0$ ist ein M-**alternierender Pfad**, wenn

- $e_i := \{v_{i-1}, v_i\} \in E$ für alle $i \in [\ell]$ und
- $|\{e_i, e_{i+1}\} \cap M| = 1$ für alle $i \in [\ell - 1]$.

gelten; wir bezeichnen seine Kantenmenge mit $E(P) = \{e_1, \ldots, e_\ell\}$.

Augmentierende Wege

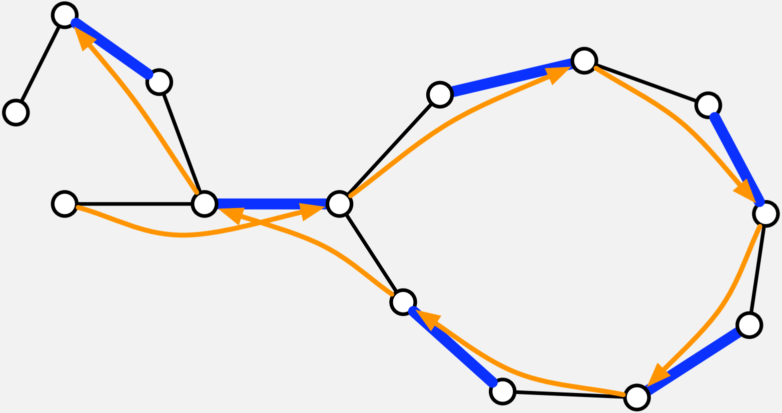
Definition 3.15

Ein M-**augmentierender Weg** ist ein M-alternierender Pfad $P = (v_0, v_1, \ldots, v_\ell)$ mit $\ell \geq 1$ und

- v_0 und v_ℓ sind M-exponiert und
- $v_0, v_1, \ldots, v_\ell$ sind paarweise verschieden

($E(P) \subseteq E$ ist also ein v_0-v_ℓ-Weg in G).

Blumen mit Blüten und Stielen



Kontraktion / Schrumpfen

Definition 3.19

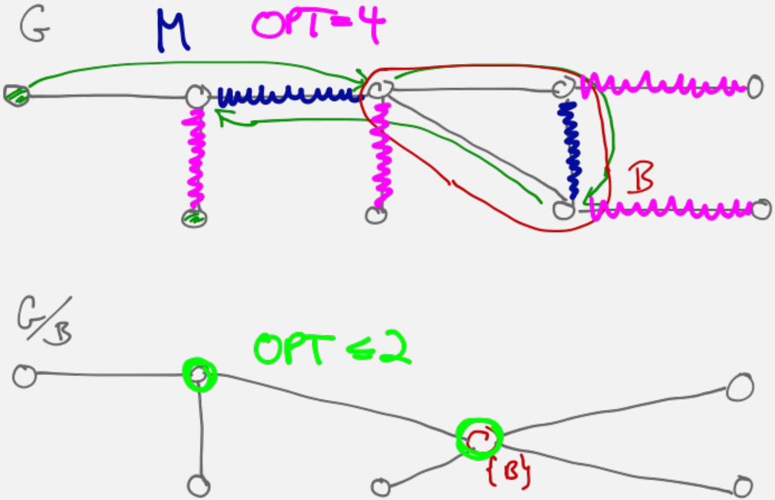
Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $S \subseteq V$. Der durch **Kontraktion** (**Schrumpfen**) von S entstehende Graph ist $G/S = (V \setminus S \cup \{S\}, E/S)$ mit

$$E/S = E(V \setminus S) \cup \{\{v, S\} \mid \delta(v) \cap \delta(S) \neq \emptyset\}.$$

Für $M \subseteq E$ definieren wir analog

$$M/S := M \cap E(V \setminus S) \cup \{\{v, S\} \mid \delta(v) \cap \delta(S) \cap M \neq \emptyset\}.$$

Vorsicht beim Schrumpfen!



Finden augmentierender Wege

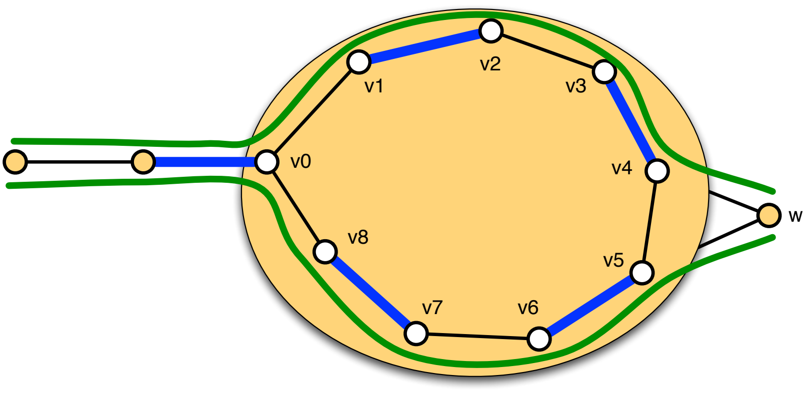
Algorithmus 3.21 (Augment-M)

Eingabe: *Matching $M \subseteq E$ in $G = (V, E)$*

Ausgabe: *M-augmentierender Weg (falls einer existiert)*

```
Konstruiere D_M
Suche einen s-t-Weg W in D_M, s ∈ X_M, t ∈ N(X_M \ {s}).
if kein solcher Weg existiert then
    Stop ("M kardinalitätsmaximal")
if W induziert Weg W̃ in G then
    Stop ("W̃ M-augmentierend")
Sei B ⊆ V die Knotenmenge der M-Blüte der M-Blume in W̃.
Rufe den Algorithmus rekursiv mit G/B und M/B auf.
if M/B kardinalitätsmaximal in G/B then
    Stop ("M kardinalitätsmaximal in G")
Expandiere den gefundenen M/B-augmentierenden Weg Q in
G/B zu einem M-augmentierenden Weg Q̃ in G.
STOP ("Q̃ M-augmentierend")
```

Expandieren augmentierender Wege



Bestimmung eines kardinalitätsmaximalen Matchings

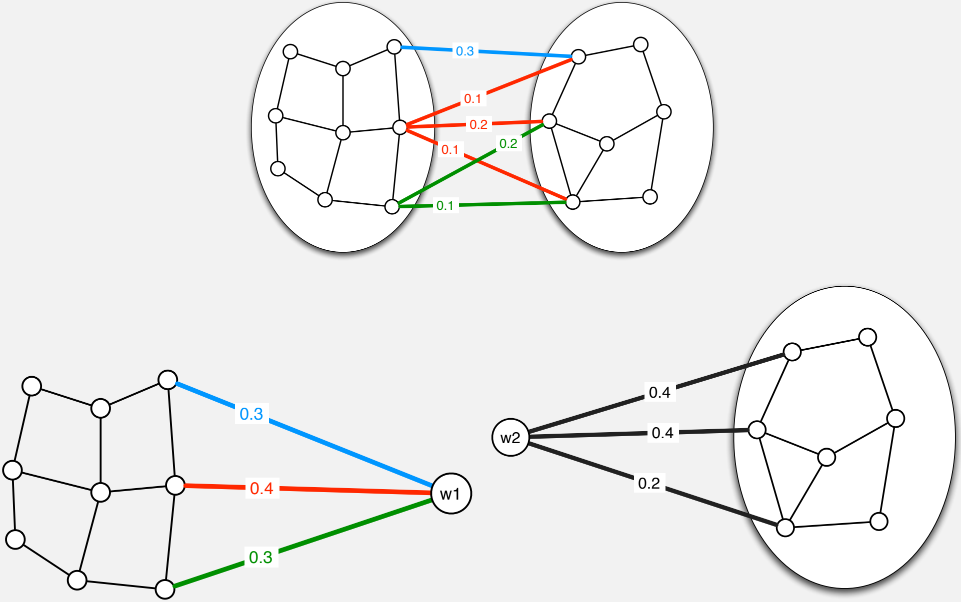
Algorithmus 3.23 (Edmonds Blossom-Shrink Algorithmus)

Eingabe: *Graph* $G = (V, E)$

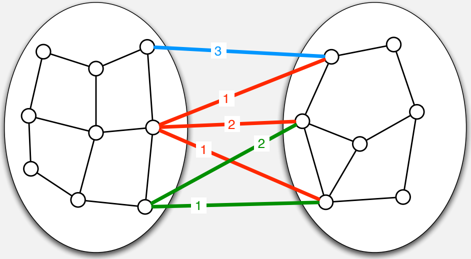
Ausgabe: *Matching* $M \subseteq E$ *maximaler Kardinalität in* G

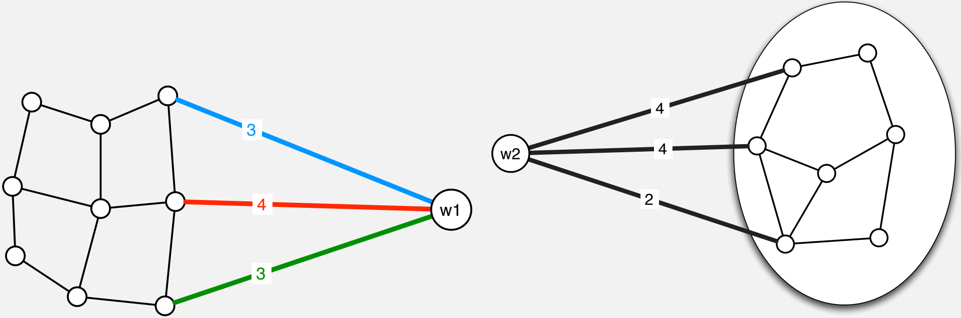
1: $M \leftarrow \emptyset$
2: *Rufe Algorithmus 3.21 auf.*
3: **if** M *kardinalitätsmaximal* **then**
4: *Stop (Ausgabe:* M*)*
5: *Sei* $W \subseteq E$ *die Kantenmenge des gefundenen* M*-augmentierenden Weges*
6: $M \leftarrow M \triangle W$
7: *Gehe zu Schritt 2.*

Beweis Satz 3.31: Kontraktionen



Beweis Satz 3.31: Kontraktionen $(K \cdot x)$





Konvexe Körper

Problem 3.34 (Separationsproblem für $K \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex)

Instanz: $x^\star \in \mathbb{Q}^n$

Aufgabe: *Entscheide, ob $x^\star \in K$ ist; wenn $x^\star \notin K$, bestimme einen Vektor $a \in \mathbb{Q}^n$ und ein $\beta \in \mathbb{Q}$ mit*

$$\langle a, x \rangle \leq \beta \quad \textit{für alle } x \in K$$

und

$$\langle a, x^\star \rangle > \beta$$

(die Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = \beta + \varepsilon\}$ trennt für genügend kleines $\varepsilon > 0$ dann $x^\star$ von K).

Ungleichungssysteme

Problem 3.35 (Separationsproblem für ein System $\mathcal{S}$ von linearen Ungleichungen und Gleichungen in $\mathbb{R}^n$)

Instanz: $x^\star \in \mathbb{Q}^n$

Aufgabe: *Entscheide, ob $x^\star$ das System $\mathcal{S}$ erfüllt; wenn nicht, bestimme eine Gleichung oder eine Ungleichung aus $\mathcal{S}$, die von $x^\star$ verletzt wird.*

Ellipsoid-Methode

- Kann man das Separationsproblem für eine Menge von endlichen Systemen von linearen Ungleichungen und Gleichungen in polynomialer Zeit lösen, so kann man auch die linearen Optimierungsprobleme über den durch diese Systeme definierten Polyedern in polynomialer Zeit lösen.
- "Polynomial": Polynomial in der Dimension und der größten Kodierungslänge einer Zahl im jeweiligen System
- Die Umkehrung gilt auch.
- "Äquivalenz von Separieren und Optimieren" (Grötschel, Lovasz, Schrijver)

Praxis: Schnittebenen-Verfahren

- Sei $\mathcal{S}$ ein System von linearen Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}^n$ und $P = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x \text{ erfüllt alle Bedingungen in } \mathcal{S}\}$.
- Sei $c \in \mathbb{Q}^n$ ein Zielfunktionsvektor.
- Wähle ein (einfaches) Teilsystem $\mathcal{T}$ von $\mathcal{S}$.
- Bestimme eine Optimallösung $x^\star$ von

  $$\max\{\langle c, x\rangle \,|\, x \text{ erfüllt } \mathcal{T}\}$$

  (mit irgendeinem *LP*-Algorithmus). Es gilt

  $$\langle c, x^\star\rangle \geq \max\{\langle c, x\rangle \,|\, x \in P\}$$

  (obere Schranke).
- Löse das Separationsproblem für $x^\star$ bzgl. $\mathcal{S}$.
  - Falls $x^\star$ ganz $\mathcal{S}$ erfüllt: $x^\star$ Optimallösung von $\max\{\langle c, x\rangle \,|\, x \in P\}$
  - Sonst füge (mindestens) eine von $x^\star$ verletzte Gleichung oder Ungleichung (**Schnittebene**) zu $\mathcal{T}$ hinzu und iteriere.

Separationsproblem für (3.6)

- Sei $x^\star \in \mathbb{Q}^E$ gegeben.
- $x^\star(\delta(v)) = 1$ (für alle $v \in V$) und $x^\star \geq \mathbb{O}$ kann man leicht überprüfen.
- $x^\star(\delta(U)) \geq 1$ gilt genau dann für alle $U \subseteq V$, $|U|$ ungerade, wenn das $x^\star$-Gewicht jeden "ungeraden Schnitts" in G mindestens Eins ist.

Definition 3.36

Ein **ungerader Schnitt** in $G = (V, E)$ ist ein Schnitt $\delta(U) \subseteq E$ mit $U \subseteq V$ und $|U|$ ungerade.

- Also: Bestimme ungeraden Schnitt minimalen $x^\star$-Gewichts.

Gomory-Hu Bäume

Definition 3.37

Für einen Graphen $G = (V, E)$ und $c \in \mathbb{R}_+^E$ ist ein **Gomory-Hu-Baum** ein Baum mit Knotenmenge V, so dass für jede Baumkante $\{s, t\}$ gilt: Sind $S \subseteq V$ und $T \subseteq V$ mit $V = S \uplus T$ die Knotenmengen der beiden Komponenten, in die der Baum durch Wegnehmen von $\{s, t\}$ zerfällt, so ist $\delta(S) = \delta(T)$ ein c-minimaler s-t-Schnitt in G.

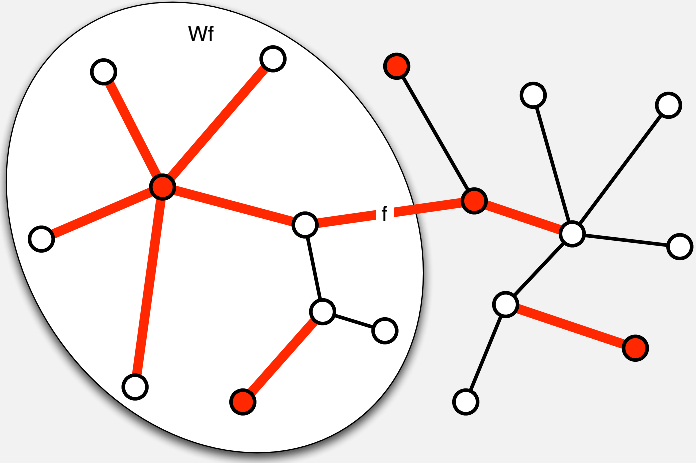
Satz 3.38

Ein Gomory-Hu-Baum kann via Berechnung von $|V| - 1$ minimalen s-t-Schnitten (maximalen s-t-Flüssen) berechnet werden.

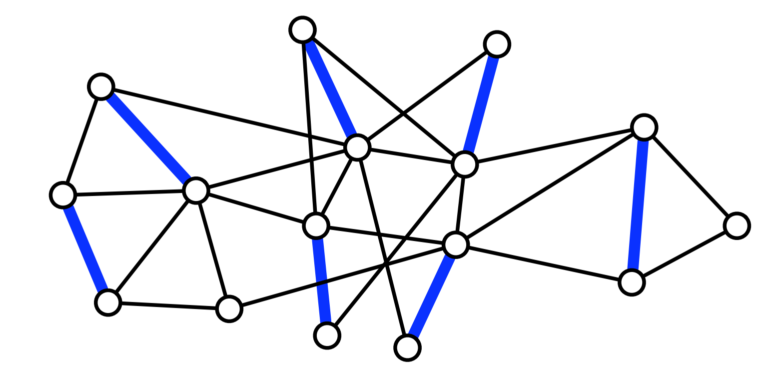
Satz 3.39

Ist $B = (V, F)$ Gomory-Hu-Baum für $G = (V, E)$ (mit $|V| \in 2\mathbb{Z}$) und $c \in \mathbb{R}_+^E$, so ist einer der von den Kanten von B induzierten Schnitte in G ein ungerader Schnitt minimalen c-Gewichts.

Gomory-Hu Baum und ungerade Schnitte



Matchings und Odd-Set Covers



Matchings und Odd-Set Covers