Vorlesung
Kombinatorische Optimierung
(Wintersemester 2016/17)

Kapitel 4: Matroide

Volker Kaibel

Otto-von-Guericke Universität Magdeburg

(Version vom 12. Dezember 2016)

Unabhängigkeitssysteme / Matroide

Definition 4.1

Ein **Unabhängigkeitssystem** mit einer endlichen Grundmenge E ist eine Menge $\mathcal{I} \subseteq 2^E$ von **unabhängigen Mengen** mit:

I_1: $\varnothing \in \mathcal{I}$

I_2: Für alle $X, Y \subseteq E$: $\quad X \subseteq Y \in \mathcal{I} \Rightarrow X \in \mathcal{I}$

Definition 4.2

Ein **Matroid** M ist ein Unabhängigkeitssystem mit Grundmenge $E(M)$ und einer Menge $\mathcal{I}(M) \subseteq 2^{E(M)}$ von unabhängigen Mengen, die folgende Eigenschaft hat:

I_3: Für alle $X, Y \in \mathcal{I}(M)$ mit $|X| < |Y|$ gilt:

Es gibt ein $e \in Y \setminus X$ mit $X \cup \{e\} \in \mathcal{I}(M)$.

Rang und Basen

Definition 4.4

Die **Rangfunktion** eines Matroids M ist $r_M : 2^{E(M)} \to \mathbb{N}$ mit

$$r_M(X) = \max\{|I| \mid I \subseteq X, I \in \mathcal{I}(M)\}$$

für alle $X \subseteq E(M)$. Der **Rang** des Matroids ist $r_M(E(M))$. Die Menge der **Basen** von M ist

$$\mathcal{B}(M) := \{B \in \mathcal{I} \mid |B| = r_M(E(M))\}.$$

Greedy-Algorithmus

Algorithmus 4.6 (Greedy-Algorithmus für Unabhängigkeitssysteme)

Eingabe: *Unabhängigkeitssystem mit Grundmenge* $E, w \in \mathbb{Q}^E$

Ausgabe: $S_0, S_1, \dots \subseteq E$

$S_0 \leftarrow \emptyset, k \leftarrow 1, U \leftarrow E$
while $U \neq \emptyset$ **do**
    Wähle $s_k \in U$ *mit* $w_{s_k} = \max\{w_s \mid s \in U\}$
    $U \leftarrow U \setminus \{s_k\}$
    if $S_{k-1} \cup \{s_k\}$ *unabhängig* **then**
        $S_k \leftarrow S_{k-1} \cup \{s_k\}, k \leftarrow k+1$

Matroid-Polytope, Basen-Polytope

Definition 4.9

Sei M ein Matroid. Das **Matroid-Polytop** zu M ist

$$P_{\mathcal{I}}(M) := \operatorname{conv}\{\mathcal{X}(I) \mid I \in \mathcal{I}(M)\}.$$

Sein **Basen-Polytop** ist

$$P_{\mathcal{B}}(M) := \operatorname{conv}\{\mathcal{X}(B) \mid B \subseteq \mathcal{I}(M) \text{ Basis von } M\}.$$

Monotonie, Normiertheit, Submodularität

Definition 4.12

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **monoton**, wenn
$$\varphi(X) \leq \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ mit $X \subseteq Y$ gilt.

Definition 4.13

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ ist **normiert**, wenn
$$\varphi(\varnothing) = 0$$
gilt.

Definition 4.14

Eine Funktion $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ (für eine endliche Menge E) ist **submodular**, wenn
$$\varphi(X \cup Y) + \varphi(X \cap Y) \leq \varphi(X) + \varphi(Y)$$
für alle $X, Y \subseteq E$ gilt.

Polymatroide

Definition 4.16

Ein **Polymatroid** ist ein Polyeder

$$P(f) = \{x \in \mathbb{R}^E \mid x(T) \leq f(T) \text{ für alle } T \subseteq E, x \geq \mathbb{O}\}$$

mit einer normierten, monotonen, submodularen Funktion $f : 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich).