$\boxed{\text{KO } 3.1.17}$

Bem. 4.10: $\mathcal{P}_B(M)$ ist die von der für $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M)$ gültigen Ungleichung

$$\langle \mathbb{1}, x\rangle = \underbrace{x(E(M))}_{\sum_{e\in E(M)} x_e} \leq r_M(E(M)) = \text{Rang von } M$$

definierte Seite von $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M)$.

Satz 4.11: Für jedes Matroid M gilt:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M) = \{x \in \mathbb{R}^{E(M)} : x(T) \leq r_M(T) \ \forall T \subseteq E(M), x \geq 0\}$$

Beweis: • Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{E(M)}$ das Polyeder auf der rechten Seite.

• $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(M) \subseteq Q$ ist klar, denn für alle $I \in \mathcal{I}(M)$ und $T \subseteq E(M)$ ist $I \cap T$ eine unabhängige Menge in T, also

$$x(T) = \sum_{e\in T} \chi(I)_e = |I \cap T| \leq r_M(T)$$

für $x = \chi(I)$

- Es gilt $Q \subseteq [0,1]^{E(M)}$ (da für jedes $x \in Q$, $e \in E(M)$ gilt: $x_e = x(\{e\}) \leq r_M(\{e\}) \in \{0,1\}$) und die ganzzahligen Punkte in Q sind genau die charakteristischen Vektoren von unabhängigen Mengen in M.

- Also genügt es, zu zeigen, dass Q ein ganzzahliges Polytop ist (d.h. $Q = \mathrm{conv}(Q \cap \mathbb{Z}^{E(M)})$ oder äquivalent dazu, dass Q nur ganzzahlige Ecken hat); das folgt aus Kor. 4.19. □

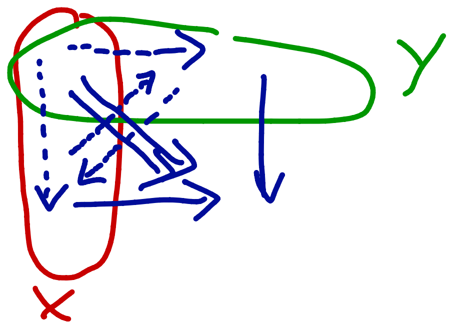
Beispiel für Submodularität

- Seien $D = (V, A)$ Digraph und $w \in \mathbb{R}^A_{+}$!

- Die Schnitt-Funktion $f : 2^V \to \mathbb{R}$ mit

$$f(X) := w(\delta^{\text{aus}}(X))$$

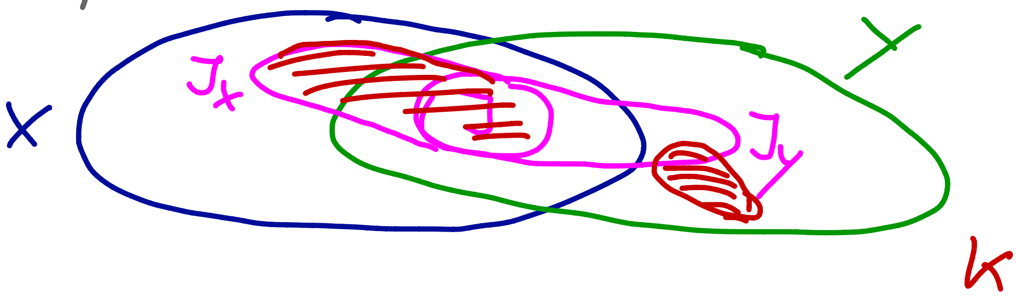
ist submodular.



Satz 4.15: Die Rang-Funktion eines Matroids M ist normiert, monoton und submodular.

Beweis: • Normiertheit und Monotonie sind klar.

• Um Submodularität nachzuweisen, seien $X, Y \subseteq E(M)$



• Wähle $J \subseteq X \cap Y$ mit $J \in \mathcal{I}(M)$ und $|J| = r_M(X \cap Y)$.

• Ergänze J zu $J \subseteq J_X \subseteq X$ und $J \subseteq J_Y \subseteq Y$ mit $J_X, J_Y \in \mathcal{I}(M)$ und

$$|J_X| = r_M(X), \quad |J_Y| = r_M(Y).$$

• Ergänze nun J_X zu $J_X \subseteq K \subseteq X \cup Y$ mit $K \in \mathcal{I}(M)$ und $|K| = r_M(X \cup Y)$

$$\cdot \quad \underbrace{J \cup (K \setminus J_X)}_{\subseteq K \in \mathcal{I}(M)} \subseteq Y$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{|J|}_{r_M(X \cap Y)} + \underbrace{|K \setminus J_X|}_{r_M(X \cup Y) - r_M(X)} \le r_M(Y)$$

$$\Rightarrow \quad r_M(X \cap Y) + r_M(X \cup Y) \le r_M(X) + r_M(Y) \quad \boxed{}$$

<u>Kor. 4.17:</u> Matroid-Polytope sind Polymatroide.

<u>Satz 4.18:</u> Seien $f: 2^E \to \mathbb{R}$ (E endlich) normiert, monoton und submodular, $w \in \mathbb{R}^E$, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $w_{e_1} \ge w_{e_2} \ge \dots \ge w_{e_n}$. Sei k maximal mit $w_{e_k} > 0$. Dann ist $x^* \in \mathbb{R}^E$ mit

$$x^*_{e_i} = \begin{cases} f(T_i) - f(T_{i-1}), & \text{falls } i \le k \\ 0, & \text{falls } i > k \end{cases}$$

eine Optimallösung von

$$\max\{\langle w, x\rangle : x \in P(f)\},$$

wobei $T_i = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ für $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.