$\boxed{\text{KO 11.11.16}}$

Bemerkungen

- Für eine Zirkulation $f \in Circ(D, \ell, u)$ kann man analog zu Def. 2.31 ein Residualnetzwerk D_f definieren via $(\forall a \in A)$

$$a \in A_f \iff f_a < u_a$$
$$\overleftarrow{a} \in A_f \iff f_a > \ell_a$$

mit Residualkapazitäten

$$\overline{u}_a := u_a - f_a \qquad \forall a \in A : a \in A_f$$
$$\overline{u}_{\overleftarrow{a}} := f_a - \ell_a \qquad \forall a \in A : \overleftarrow{a} \in A_f$$

und Residualkosten

$$\overleftrightarrow{c}_a := c_a \qquad \forall a \in A$$
$$\overleftrightarrow{c}_{\overleftarrow{a}} := -c_a \qquad \forall a \in A$$

Satz 2.47 $f \in \mathrm{Circ}(D, \ell, u)$ ist genau dann eine c-kostenminimale Zirkulation, wenn D_f keinen Kreis negativer $\overleftrightarrow{c}$-Länge hat.

Bew.: • Ist $C \in A_f$ ein Kreis in D_f, so ist $\tilde{f} := \mathrm{aug}(f, c, \mathrm{cap}(C))$ eine Zirkulation und

$$\langle c, \tilde{f} \rangle = \langle c, f \rangle + \overleftrightarrow{c}(C).$$

• Umgekehrt induzieren $f, \tilde{f} \in \mathrm{Circ}(D, \ell, u)$ eine Zirkulation $\overleftrightarrow{f} \in \mathbb{R}_+^{\overleftrightarrow{A}}$ und:

$\forall a \in A$:

Falls $f_a < \tilde{f}_a$: $\overleftrightarrow{f}_a := \tilde{f}_a - f_a$, $\overleftrightarrow{f}_{\overleftarrow{a}} := 0$

Falls $f_a > \tilde{f}_a$: $\overleftrightarrow{f}_{\overleftarrow{a}} := f_a - \tilde{f}_a$, $\overleftrightarrow{f}_a := 0$

Sonst: $\overleftrightarrow{f}_a := \overleftrightarrow{f}_{\overleftarrow{a}} := 0$

[Weil $\tilde{f} - f \in \ker(\mathrm{Inc}(D))$]

und $\langle \overleftrightarrow{c}, \overleftrightarrow{f} \rangle = \langle c, \tilde{f} - f \rangle$

$$= \langle c, \tilde{f} \rangle - \langle c, f \rangle$$

- Da $\ell \leq \tilde{f} \leq u$ ist, ist $\overleftrightarrow{f}_{A_f}$ sogar eine Zirkulation in D_f.
- Nach Satz 2.18 gibt es kein $C_1, \dots, C_k \subseteq A_f$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$ mit

$$\overleftrightarrow{f}_{A_f} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \chi(C_i) \;.$$

- Ist $c(\tilde{f}) < c(f)$, so ist $\underbrace{\langle \overleftrightarrow{c}, \overleftrightarrow{f} \rangle}_{= \langle \overleftrightarrow{c}_{A_f}, \overleftrightarrow{f}_{A_f} \rangle} < 0$,

so gibt es also wenigstens ein $i \in [k]$ mit

$$\langle \overleftrightarrow{c}, \chi(C_i) \rangle < 0 .$$

$\blacksquare$

Kor. 2.48 $f \in \mathrm{Circ}(D, l, u)$ ist genau dann eine c-kostenminimale Zirkulation, wenn es in D_f ein $\overleftrightarrow{c}$-Potential gibt, d.h., genau dann, wenn $\pi \in \mathbb{Q}^V$ existiert mit: $\forall a = (v,w) \in A$:

$$c_a \geq \pi_w - \pi_v \qquad f_a < u_a$$
$$c_a \geq \pi_v - \pi_w \qquad f_a > l_a$$

Bem.: Kor. 2.48 erhält man auch aus dem Satz vom komplementären Schlupf für

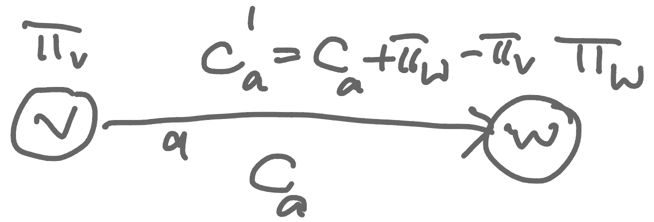
$$\min\{\langle c, f\rangle : \mathrm{Inc}(D) \cdot f = 0,\ l \leq f \leq u\}.$$

Kor. 2.50: Für ganzzahlige Schranken $l, u \in \mathbb{Z}^A$ hat das Min-Cost-Circulation Problem immer eine ganzzahlige Optimallösung (wenn es überhaupt eine Lösung hat).

Bem.: Alg. 2.49 hat i.A. keine polynomial in der Eingabelänge beschränkbare Laufzeit.

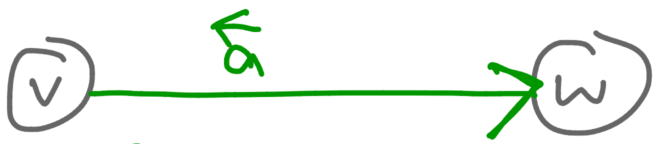
Lem. 2.51: Für $\pi \in \mathbb{R}^V$ und $c' \in \mathbb{R}^A$
mit

$$c'_{vw} := c_{vw} + \pi_w - \pi_v \quad \forall (v,w) \in A$$



gilt $\overleftrightarrow{c}(C) = \overleftrightarrow{c}'(C)$ für alle Kreise $C \subseteq \overleftrightarrow{A}$ in $\overleftrightarrow{D}$.

$\overleftrightarrow{D}$



$a = (w,v)$

$$\overleftrightarrow{c}_{\overleftarrow{a}} = -c_a$$

$$\overleftrightarrow{c}'_{\overleftarrow{a}} = -c'_a = -c_a - \pi_v + \pi_w$$