KO 13.12.16

Bemerkungen

- Jede Knotenüberdeckung $W_0 \subseteq V$ ist ein odd-set cover der Kapazität $|W_0|$.

- Satz 3.6 (Satz von König) ist also eine Verschärfung von Satz 3.43 für bipartite Graphen.

- Die Frage "Hat G ein Matching mit k Kanten?" hat also eine "gute Charakterisierung": Entweder hat G ein Matching mit $\geq k$ Kanten oder ein odd-set cover mit Kapazität $< k$ (aber nicht beides).

Kor. 3.44 (Tutte-Berge Formel)

Für jeden Graphen $G = (V, E)$ ist die maximale Kardinalität eines Matchings

$$\min \left\{ \frac{1}{2}\left(|V| + |U| - \mathrm{odd}(G \setminus U) \right) : U \subseteq V \right\}$$

mit $\mathrm{odd}(G \setminus U) = \#$ ungerade Zusammenhangskomponenten von $G \setminus U$.

Beweis: Freitag.

Beispiele für Unabhängigkeitssysteme

B_1: $G = (V, E)$, Grundmenge E

$$\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : F \text{ enthält keinen Kreis} \}$$

(Wälder in G)

B_2: K Körper, $E \subseteq K^n$ (Spalten einer Matrix)

$$\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : F \text{ ist } K\text{-linear unabhängig} \} .$$

B_3: E endliche Menge, $r \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : |F| \leq r \}$$

B_4: $G = (V, E)$

$$\mathcal{I} := \{ F \subseteq E : \exists \text{ Kreis } H \subseteq E : F \subseteq H \}$$

Bemerkung: Unabhängigkeitssysteme sind das Gleiche wie (abstrakte) Simplizialkomplexe in der (algebraischen) Topologie.

Beispiele:

- B_2 : Matroid (Steinitz Austauschsatz) $\rightsquigarrow$ **lineare Matroide** über k
- B_3 : Matroid $\rightsquigarrow$ **uniforme Matroide**
- B_4 : **kein Matroid**

Satz 4.3: Für jeden Graphen $G=(V,E)$ bilden die Wälder $F \subseteq E$ die unabhängigen Mengen eines Matroides, des **graphischen Matroides zu G**.

Beweis: • Für jeden Wald $F \subseteq E$ sei $k(F)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von (V,F); es gilt

$$k(F) = |V| - |F|$$

(Induktion nach $|F| = 0, 1, 2, \dots$)

• Seien $X, Y \subseteq E$ Wälder mit $|X| < |Y|$.

• Angenommen, für jedes $e \in Y \setminus X$ hätte $X \cup \{e\}$ einen Kreis

$\Longrightarrow$ $X \cup Y$ hat die gleichen Komponenten wie X

Wegen $K(Y) \geq \#$ Komp. von $X \cup Y$ gilt also $K(Y) \geq K(X)$

$\Longrightarrow$ $|V| - |Y| \geq |V| - |X|$

$\Longrightarrow$ $|Y| \leq |X|$ $\lightning$ $|Y| > |X|$ $\blacksquare$