KO 15.11.16

Satz 2.52: Wählt man in Schritt 3 von Algorithmus 2.49 immer einen Kreis $G \subseteq A_f$, für den

$$\frac{\overleftrightarrow{c}(G)}{|G|}$$

minimal ist, so führt der Algorithmus höchstens

$$4 \cdot |V| \cdot |A|^2 \cdot \lceil \ln |V| \rceil$$

Augmentationen durch.

Beweis:

- Seien $n := |V|$, $m := |A|$
- Seien $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots \in \mathbb{R}^A$ die Zirkulationen, die der Algorithmus bestimmt.

- Es sei $A_i := A_{f_i}$ und $C_i \subseteq A_i$ der vom Algorithmus gewählte Kreis $\overleftrightarrow{c}$-minimaler Durchschnittslänge und
$$\varepsilon_i := -\frac{\overleftrightarrow{c}(C_i)}{|C_i|} > 0.$$
- Für $B \subseteq \overleftrightarrow{A}$ sei
$$B^{-1} := \{\overleftarrow{a} : a \in A, a \in B\} \cup \{a : a \in A, \overleftarrow{a} \in B\}$$
- Setze $t := 2nm\lceil \ln(n) \rceil$
- Es genügt, folgende Aussage zu zeigen:

$\boxed{\text{(A) Für jedes } i \text{ existiert ein } b^* \in C_i \text{ mit } b^* \notin C_h \text{ mit } h \geq i+t.}$

[Wegen $|\overleftrightarrow{A}| = 2m$ folgt damit die Behauptung des Satzes, weil nach spätestens pt Augmentationen p Bögen in $\overleftrightarrow{A}$ existieren, die in keinem späteren Augmentationskreis mehr enthalten sind.]

- Um (A) zu beweisen, zeigen wir zunächst für alle i:

(1) $\varepsilon_{i+1} \leq \varepsilon_i$

(2) $\varepsilon_{i+m} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \varepsilon_i$

(3) $\varepsilon_{i+t} < \frac{1}{2n} \cdot \varepsilon_i$

- Für den Beweis von (1), (2), (3) und später (A) können wir $i = 0$ annehmen.

- Die folgenden Bogenlängen

$$\tilde{c} := \overleftrightarrow{c} + \varepsilon_0 \cdot \mathbb{1}_{\overleftrightarrow{A}}$$

sind konservativ in A_0 und $\tilde{c}(C_0') = 0$.

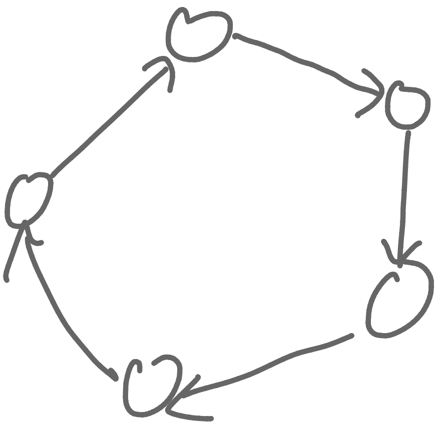
- Nach Satz 1.44 gibt es ein $\tilde{c}$-Potential $\pi \in \mathbb{R}^V$, für das dann für alle $a = (v, u) \in A$ gilt:

$$c_a + \varepsilon_0 = \tilde{c}_a \geq \pi_w - \pi_v \qquad \forall a \in A_0$$

$$-c_a + \varepsilon_0 = \tilde{c}_{\overleftarrow{a}} \geq \pi_v - \pi_w \qquad \forall \overleftarrow{a} \in A_0$$

mit "=" für alle $a, \overleftarrow{a} \in C_0$, weil $\tilde{c}(C_0) = 0$.

[



C_0

$$\alpha_i \geq \beta_i, \quad \sum \alpha_i = 0, \quad \sum \beta_i = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i$$]

- Wegen Lemma 2.51 können wir durch Übergang von c zu c' mit

$$c'_{vw} = c_{vw} + \pi_w - \pi_v \qquad \forall (v,w) \in A$$

für alle $a \in A$

$$c_a + \varepsilon_0 \geq 0 \quad \text{falls } a \in A_0$$

$$-c_a + \varepsilon_0 \geq 0 \quad \text{falls } \overleftarrow{a} \in A_0$$

(und Gleichheit falls a bzw. $\overleftarrow{a}$ in C_0) annehmen, also

$$\overleftrightarrow{c}_b \geq -\varepsilon_0 \quad \text{für alle } b \in A_0$$

und "=" für alle $b \in C_0$.

- Da $A_1 \setminus A_0 \subseteq C_0^{-1}$ ist und $\overleftrightarrow{c}_b = -\varepsilon_0 < 0$ für alle $b \in C_0$, haben wir also $\overleftrightarrow{c}_b = \varepsilon_0 > 0$ für alle $b \in A_1 \setminus A_0$; wegen $\overleftrightarrow{c}_b \geq -\varepsilon_0$ für alle $b \in A_0$ also

$$\frac{\overleftrightarrow{c}(C)}{|C|} \geq -\varepsilon_0$$

für alle Kreise $C \subseteq A_1$, also $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, was (1) beweist.