Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 1

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/

Präsentation in der Übung am 27.10.2016

Aufgabe 1

1. Geben Sie einen Polynomialzeitalgorithmus, der in Digraphen $D = (V, A)$ mit konservativen Gewichten $c \in \mathbb{R}^A$ einen Kreis kürzester c-Länge findet.

2. Ein Hamiltonkreis ist ein Kreis, der alle Knoten in V einmal durchläuft. Das Problem zu entscheiden, ob ein Hamiltonkreis existiert, wird Hamiltonkreisproblem genannt. Es ist bekannt, dass das Hamiltonkreisproblem $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

   Zeigen Sie, dass, wenn man in Polynomialzeit einen c-kürzesten Kreis für allgemeine Gewichte c finden könnte, auch das Hamiltonkreisproblem in Polynomialzeit lösen kann. Erklären Sie, was dies aus komplexitätstheoretischer Sicht für die Suche nach c-kürzesten Kreisen für allgemeine Gewichte c bedeutet.

Aufgabe 2

Betrachte das *Bottleneck-Problem*: Gegeben sei ein gewichteter Digraph $D = (V, A)$ mit nicht-negativen Bogenkapazitäten $c \in \mathbb{Q}_+^A$, sowie Knoten $s, t \in V$. Ist P ein s-t-Weg in D, so ist die kleinste Kapazität der in P auftretenden Kanten die Kapazität $c(P)$ des Weges, also

$$c(P) := \min \{c(a) : a \in A(P)\} \ .$$

Das Problem besteht nun darin, unter allen s-t-Wegen denjenigen maximaler Kapazität zu finden. Gib einen modifizierten Dijkstra-Algorithmus an, der das Bottleneck-Problem für gegebene D, s, t, c lösen kann und analysiere seine Laufzeit. Skizziere den Beweis seiner Korrektheit: Warum funktioniert Dijkstra für das Bottleneck-Problem, aber nicht für kürzeste Wege mit negativen Gewichten? Was ist der Unterschied?

Aufgabe 3

Gegeben sei ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ und eine Länge $w_a(\tau) \in \mathbb{N}$ für jeden Bogen $a \in A$ und jeden Zeitpunkt $\tau \in \{0, 1, \dots, T\}$ bis zu einem Zeithorizont $T \in \mathbb{N}$. Die *Dauer* $\ell(W)$ eines Weges W, der aus einem Weg W' sowie dem letzten Bogen a besteht, ist definiert als

$$\ell(W) = \ell(W') + w_a(\ell(W')) \ ,$$

wobei die Dauer eines Weges mit kombinatorischer Länge 0 als 0 definiert wird. Für welches τ eine Länge $w_a(\tau)$ summiert wird, ist also durch den Ankunftszeitpunkt τ am Startknoten des Bogens a bestimmt. Am Anfang befindet man sich im Knoten s zum Zeitpunkt $\tau = 0$.

Konstruiere eine Instanz des Problems, die zeigt, dass der Dijkstra-Algorithmus für dieses Kürzeste-Wege Problem nicht funktioniert.

Zeige, dass man eine Variante des Problems mittels Dijkstra trotzdem lösen kann, indem man kürzeste Wege auf einem Hilfsgraphen mit $\mathcal{O}(|V| \cdot (T+1))$ Knoten berechnet. In der Variante sei das (beliebig lange) Warten an einem Knoten erlaubt.