Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 3

`www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/`

Präsentation in der Übung am 03.11.2016

Aufgabe 1

Gegeben sei ein 0/1-Rucksack-Problem mit Gewichten $a \in \mathbb{N}^n$, Gewichtsschranke β, und Profiten $c \in \mathbb{N}^n$. Konstruiere einen azyklischen Graphen, mit dem man das Problem als Kürzeste-Wege-Problem lösen können. Die Laufzeit soll dabei polynomiell in n und $\sum_{i=1}^n c_i$ sein.

Hinweis: Der Algorithmus darf die Lösung des aufgestellten Kürzeste-Wege-Problems noch untersuchen, bevor er seinerseits die Optimallösung des Rucksack-Problems ausgibt.

Aufgabe 2

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit nichtnegativen Knotengewichten $c \in \mathbb{Q}_+^V$, so dass für jede Kante $\{u, v\} \in E$ die Ungleichung

$$c_u + c_v \leq 1 \tag{1}$$

erfüllt ist. Finde einen Algorithmus, der durch $|V|$ Aufrufe von Dijkstra's Algorithmus in einem geeigneten Hilfsgraphen entscheidet, ob es einen Kreis C ungerader kombinatorischer Länge mit $\sum_{v \in V(C)} c_v > \frac{1}{2}(|V(C)| - 1)$ gibt.

Hinweis: Der Hilfsgraph ist ungefähr doppelt so groß wie G und nutzt für die Kantengewichte exzessiv Eigenschaft (1) aus.

Aufgabe 3

Beweise das Fluss-Dekompositionstheorem: Ist $f \in \mathbb{R}_+^A$ ein s-t-Fluss in einem Netzwerk $(D = (V, A), u)$, so gibt es eine Menge $\mathcal{P}$ von s-t-Wegen und eine Menge $\mathcal{C}$ von Kreisen in D, sowie $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+$ mit:

(i) $f_a = \sum_{\substack{Q \in \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \\ a \in Q}} w(Q)$ für alle $a \in A$.

(ii) $\mathrm{val}(f) = \sum_{Q \in \mathcal{P}} w(Q)$

(iii) $|\mathcal{P}| + |\mathcal{C}| \leq |A|$

Falls $f \in \mathbb{Z}_+^A$ ist, kann man sogar $w : \mathcal{P} \cup \mathcal{C} \to \mathbb{Z}_+$ wählen.