Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 4

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/

Präsentation in der Übung am 10.11.2016

Aufgabe 1

Gegeben sei ein Digraph $D = (V, A)$ und $M \in \mathbb{R}^{V \times A}$ die Knoten-Bögen-Inzidenzmatrix von D, sowie c die Anzahl der schwachen Zusammenhangskomponenten von D.
Zeige, dass der Rang von M gleich $|V| - c$ ist!

Hinweis: Untersuche $\ker M^\top$.

Aufgabe 2

Sei $D = (V, A)$ ein azyklischer Digraph mit Knoten $s, t \in V$ $(s \neq t)$. Wir betrachten das Polytop

$$P := \left\{ x \in [0,1]^A : x(\delta^{\text{aus}}(v)) - x(\delta^{\text{ein}}(v)) = \begin{cases} 1 & v = s \\ -1 & v = t \\ 0 & v \in V \setminus \{s, t\} \end{cases} \right\},$$

welches zum Fluss-LP des Netzwerks gehört, bei dem alle Kapazitäten den Wert 1 haben und der Flusswert auf 1 gesetzt wurde.
Zeige, dass P die konvexe Hülle von charakteristischen Vektoren $\chi(Q)$ von s-t-Wegen Q in D ist. Zeige weiterhin, dass jeder dieser Wege auch tatsächlich eine Ecke definiert.

Hinweis: Nutze das Fluss-Dekompositionstheorem sowie allgemeine Eigenschaften von 0/1-Polytopen!

Aufgabe 3

Sei S eine endliche Menge und 2^S ihre Potenzmenge. Eine Funktion $f : 2^S \to \mathbb{R}$ heißt *submodular*, wenn für alle Teilmengen $A, B \subseteq S$ gilt, dass

$$f(A \cup B) + f(A \cap B) \leq f(A) + f(B) .$$

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kantengewichten $c \in \mathbb{R}_+^E$.

(a) Beweise, dass die c-Kapazitätsfunktion von Schnitten

$$c : 2^V \to \mathbb{R}_+ \text{ via } W \mapsto c(W) := c(\delta(W)) = \sum_{e \in \delta(W)} c(e)$$

submodular ist.

(b) Beweise unter Verwendung von (a): Sind $\delta(S_1)$ und $\delta(S_2)$ minimale s-t-Schnitte mit $s \in S_1 \cap S_2$, so sind auch $\delta(S_1 \cap S_2)$ und $\delta(S_1 \cup S_2)$ minimale s-t-Schnitte.

(c) Sei $s, t \in V$, $s \neq t$ und $\delta(A)$ mit $s \in A$ ein minimaler s-t-Schnitt in G. Weiter seien $s', t' \in V \setminus A$ mit $s' \neq t'$. Zeige unter Verwendung von (a), dass es einen minimalen s'-t'-Schnitt $\delta(S)$ gibt, bei dem $A \subseteq S$ gilt.