Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 5

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/

Präsentation in der Übung am 17.11.2016

Aufgabe 1

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Matching* ist eine Menge $M \subseteq E$ von Kanten, die paarweise nicht inzident sind, d.h. für alle $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$ gilt immer $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \varnothing$. Eine *Knotenüberdeckung* ist eine Teilmenge S der Knoten, so dass jede Kanten des Graphen zu mindestens einem Knoten in S inzident ist.
Beweise den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

Satz von König. *In jedem bipartiten Graphen ist die maximale Kardinalität eines Matchings gleich der minimalen Kardinalität einer Knotenüberdeckung.*

Hinweis: Transformiere das Problem, in einem bipartiten Graphen ein Matching maximaler Kardinalität zu finden, in ein Max-Flow Problem.

Aufgabe 2

Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *perfektes Matching* ist ein Matching $M \subseteq E$ (d.h. für alle $\{u, v\}, \{x, y\} \in M$ gilt $\{u, v\} \cap \{x, y\} = \varnothing$) für das $2|M| = |V|$ (d.h. $\bigcup_{e \in M} e = V$) gilt.
Mit $N(W) = \{v \in V : \exists w \in W \text{ mit } \{v, w\} \in E\}$ sei die Nachbarschaft einer Knotenmenge $W \subseteq V$ bezeichnet.
Beweise den folgenden Satz aus der Graphentheorie mit Hilfe des Max-Flow-Min-Cut Theorems.

Satz von Hall. *Ein bipartiter Graph $G = (V, E)$ besitzt genau dann ein perfektes Matching, wenn $|N(W)| \geq |W|$ für alle $W \subseteq V$ gilt.*

Aufgabe 3

Das *Partitions-Problem* ist das (NP-vollständige) Problem, bei dem eine Menge von natürlichen Zahlen $c_1, \dots, c_n$ gegeben ist und entschieden werden soll, ob es eine Teilmenge $S \subseteq [n]$ gibt, so dass $\sum_{i \in S} c_i = \sum_{i \notin S} c_i$ gilt.
Führe das Partitions-Problem auf das Problem zurück, für ein gegebenenes Netzwerk und einen Parameter k festzustellen, ob es einen maximalen Fluss gibt, der sich in höchstens k Wege zerlegen lässt. Konstruiere dafür ein Netzwerk mit $n + 2 + 2$ Knoten, in dem unter anderen die c_i als Bogenkapazitäten auftreten und ein maximaler s-t-Fluss immer Flusswert $C = \sum_{i=1}^{n} c_i$ hat.