Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 7

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/

Präsentation in der Übung am 01.12.2016

Aufgabe 1

Zeige, dass ein k-regulärer (d.h. jeder Knoten hat konstanten Grad k) bipartiter Graph in k disjunkte perfekte Matchings zerlegt werden kann.
Zeige damit, dass ein bipartiter Graph G mit Maximalgrad $\Delta(G) = k$ in k disjunkte Matchings zerlegt werden kann. Überlege Dir dafür, wie man G geeignet zu einem k-regulären Graphen erweitern kann.

Aufgabe 2

Wir betrachten für gerades $n \in \mathbb{N}$ den vollständigen Graphen K_n mit n Knoten und Kantenmenge E_n sowie Kantenkosten $c \in \mathbb{R}^{E_n}$.

(a) Wieviele perfekte Matchings hat der vollständige Graph K_n?

(b) Wir ziehen ein perfektes Matching M zufällig gleichverteilt aus allen perfekten Matchings von K_n. Gegeben eine Kante $e \in E_n$, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass M die Kante e enthält?

(c) Was sind die erwarteten Kosten eines so zufällig gezogenen perfekten Matchings?

Hinweis: Nutze die Linearität des Erwartungswertes!

(d) Zeige: Es gibt ein perfektes Matching mit Kosten von höchstens

$$\frac{1}{n-1} \sum_{e \in E_n} c_e \ .$$

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der für beliebige Graphen und beliebige Kantengewichte ein gewichtsminimales perfektes Matching finden kann (oder feststellt, dass keines existiert). Seien $G = (V, E)$ ein Graph, $c \in \mathbb{Q}^E$ Kantengewichte und $T \subseteq V$ mit $|T|$ gerade eine Teilmenge der Knoten.
Eine Kantenteilmenge $J \subseteq E$ heißt T-*Join*, falls T genau die Menge der Knoten des Untergraphen (V, J) mit ungeradem Grad ist.
Beweise folgende Aussagen:

(a) Jedes $\{s, t\}$-Join J (für zwei Knoten $s, t \in V$) lässt sich (kantendisjunkt) in genau einen s-t-Weg und Kreise zerlegen.

(b) Das Problem, für beliebige Kosten $c \in \mathbb{Q}^E$ ein c-minimales T-Join zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Betrachte dazu den Graphen $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_2)$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{V} &:= \{(v,e) : v \in e \in E\} \cup \{(v,☺) : v \in V,\ \underline{\text{entweder}}\ v \in T \text{ oder } \deg(v) \text{ ungerade } \}\\
\widetilde{E}_1 &:= \{\{(v,e),(w,e)\} : \{v,w\} = e \in E\}\\
\widetilde{E}_2 &:= \left\{\{(v,e),(v,f)\} : (v,e),(v,f) \in \widetilde{V}, e,f \in E \cup \{☺\}\right\}
\end{aligned}$$

und zeige, dass für jedes perfekte Matching $\widetilde{M}$ in $\widetilde{G}$ die Kanten in $\widetilde{M} \cap \widetilde{E}_1$ ein T-Join in G induzieren. Zeige weiterhin, dass es für jedes T-Join ein entsprechendes perfektes Matching in $\widetilde{G}$ gibt.

(c) Das Problem, für konservative Kantengewichte $c \in \mathbb{Q}^E$ einen c-kürzesten s-t-Weg zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Nutze dafür (a) und (b).