Prof. Dr. Volker Kaibel
M.Sc. Benjamin Peters
Wintersemester 2016/2017

Kombinatorische Optimierung – Blatt 8

www.math.uni-magdeburg.de/institute/imo/teaching/wise16/kombopt/

Präsentation in der Übung am 08.12.2016

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ ein Algorithmus, der für beliebige Graphen und beliebige Kantengewichte ein gewichtsminimales perfektes Matching finden kann (oder feststellt, dass keines existiert). Seien $G = (V, E)$ ein Graph, $c \in \mathbb{Q}^E$ Kantengewichte und $T \subseteq V$ mit $|T|$ gerade eine Teilmenge der Knoten.
Eine Kantenteilmenge $J \subseteq E$ heißt T*-Join*, falls T genau die Menge der Knoten des Untergraphen (V, J) mit ungeradem Grad ist.
Beweise folgende Aussagen:

(a) Jedes $\{s, t\}$-Join J (für zwei Knoten $s, t \in V$) lässt sich (kantendisjunkt) in genau einen s-t-Weg und Kreise zerlegen.

(b) Das Problem, für beliebige Kosten $c \in \mathbb{Q}^E$ ein c-minimales T-Join zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Betrachte dazu den Graphen $\widetilde{G} = (\widetilde{V}, \widetilde{E}_1 \cup \widetilde{E}_2)$ mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{V} &:= \{(v, e) : v \in e \in E\} \cup \{(v, ☺) : v \in V, \ \underline{\text{entweder}}\ v \in T \text{ oder } \deg(v) \text{ ungerade }\} \\
\widetilde{E}_1 &:= \{\{(v, e), (w, e)\} : \{v, w\} = e \in E\} \\
\widetilde{E}_2 &:= \left\{\{(v, e), (v, f)\} : (v, e), (v, f) \in \widetilde{V}, e, f \in E \cup \{☺\}\right\}
\end{aligned}$$

und zeige, dass für jedes perfekte Matching $\widetilde{M}$ in $\widetilde{G}$ die Kanten in $\widetilde{M} \cap \widetilde{E}_1$ ein T-Join in G induzieren. Zeige weiterhin, dass es für jedes T-Join ein entsprechendes perfektes Matching in $\widetilde{G}$ gibt.

(c) Das Problem, für konservative Kantengewichte $c \in \mathbb{Q}^E$ einen c-kürzesten s-t-Weg zu finden, kann man mit Hilfe von $\mathcal{A}$ lösen. Nutze dafür (a) und (b).

Aufgabe 2

Ein Assistent hat für eine Übungsstunde mit n Studierenden eine Liste mit n Aufgaben vorbereitet. Jeder Studierende soll genau eine Aufgabe vorrechnen. Dafür hat jeder Studierende sich eine Präferenzliste, welche Aufgabe er am liebsten rechnen möchte, am zweitliebsten usw. Andererseits hat der Übungsleiter für jede Aufgabe eine Liste angelegt, die voraussagt, wieviel Zeit ein Studierender für diese Aufgabe voraussichtlich benötigen wird. Die Zeitangaben auf einer solchen Liste sind paarweise verschieden. Eine Zuordnung der Aufgaben zu den Studierenden heißt nun *ideal*, wenn kein Student eine Aufgabe, die er lieber gerechnet hätte und auch noch schneller als derjenige, der sie schließlich rechnet, nicht bekommt.
Betrachte nun folgenden Algorithmus zur Bestimmung einer Zuordnung der Aufgaben: Es gebe zum einen eine Liste von Studierenden L, die noch keine Aufgabe bekommen

haben. Diese enthält am Anfang alle Studierenden. Damit wird nun folgender Schritt iteriert:
Ein beliebiger Studierender in L wird gewählt und von L gestrichen. Er wählt von seiner Liste die Aufgabe, die er am liebsten möchte. Ist die Aufgabe noch frei, bekommt er sie zugewiesen, ist sie jedoch schon an jemand anderen vergeben, so wird die Aufgabe an denjenigen der beiden vergeben, der sie schneller rechnen kann. In diesem Fall wird der Studierende, der leer ausgegangen ist, wieder auf L gesetzt, und er streicht die Aufgabe, die ihm entgangen ist, von seiner Präferenzliste.

(a) Übersetze die Aufgabe in ein perfektes Matching Problem mit besonderen Nebenbedingungen.

(b) Zeige, dass das vorgeschlagene Verfahren mit einer idealen Zuordnung terminiert.

(c) Schätze die Laufzeit des Verfahrens ab.

Aufgabe 3

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit Kosten $c \in \mathbb{R}^E$ und M ein Matching in G. Ein Kreis $C = (e_1, e_2, \ldots, e_k)$ als Folge von Kanten heißt *M-alternierend*, falls seine Kanten abwechselnd zu M und nicht zu M gehören, also $e_1, e_3, \ldots, e_{k-1} \in M$ und $e_2, e_4, \ldots, e_k \notin M$.
Die Kosten eines M-alternierenden Kreises C sind gegeben durch

$$c(C) := \sum_{e \in C \setminus M} c_e - \sum_{e \in C \cap M} c_e \ .$$

Zeige: Ein gegebenes perfektes Matching M ist genau dann kostenminimal, wenn es keinen alternierenden Kreis C bezüglich M mit negativen Kosten gibt.

Hinweis: Betrachte die symmetrische Differenz zwischen einem kostenminimalen und einem nicht kostenminimalen perfekten Matching.